ESTATISTIKA ETA DATUEN ANALISIA

XII: Zenbaki indizeak

Egilea: Josemari Sarasola

Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

12.1 Zer diren zenbaki indizeak

12.2 Zenbaki indizeen oinarria

12.3 Zenbaki indize sinpleak

12.3.1 Zenbaki indize sinpleak seriean

12.3.2 Zenbaki indize sinpleak katean

12.4 Indize konplexuak

12.4.1 Haztatu gabeko indize konplexuak

12.4.1.1 Carli indizeak

12.4.1.2 Jevons indizeak

12.4.1.3 Dûtot indizeak

12.4.2 Indize konplexu haztatuak

12.4.2.1 Laspeyres indizeak

12.4.2.2 Paasche indizeak

12.4.2.3 Marshall-Edgeworth indizeak

12.4.2.4 Fisher indize ideala

12.5 Erreperkutsioa eta partaidetza

12.6 Indize kuantikoak

12.7 Balio indizeak

12.8 Indizeen propietateak: zirkulartasuna

12.8.1 Zirkulartasunaren aplikazioa: indizeak katean

12.8.2 Zirkulartasunaren aplikazioa: oinarri-aldaketa

12.9 Batez besteko hazkundea

12.10 Deflaktazioa

12.11 Ariketak

12. gaia: Zenbaki indizeak

12.1 Zer diren zenbaki indizeak

Zenbaki indizeak edo, besterik gabe, **indizeak** aldagai batzuen baterako bilakaera portzentuala azaltzen duten zenbakiak dira, hala nola produktu batzuen prezioak eta produktu batzuen ekoizpenak, salmentak edo kontsumoak. Zenbaki horien kalkulua konplexua da produktu ezberdinetako prezioak eta kopuruak bateratzea ez baita lan sinplea, prezioen kasuan adibidez prezio guztiak ez baitira berdinak. Hain zuzen, zenbaki indizeak bereziki prezioen bilakaera emateko kalkulatzen dira (*prezio-indize* deitzen zaie orduan); horien adibide ezagunena Kontsumorako Prezioen Indizea (KPI) da, partikularrek kontsumitzen dituzten produktu eta zerbitzuen prezioen bilakaera adierazten duena. Ekoizpen, salmenta eta kontsumo fisikoen bilakaera aztertzeko ere erabiltzen dira, eta orduan *indize kuantiko* deitzen zaie.

12.2 Zenbaki indizeen oinarria

Aldagai batzuen bilakaera aztertzeko, zenbaki indizeek une jakin bat hartzen dute erreferentziatzat, *oinarri-aldia* deitzen dena. Oinarri-aldi horretan zenbaki indizeak 100 balioa hartzen du beti, eta hortik aurrera prezioen, ekoizpenaren edo kontsumoaren maila oinarriko 100 balio horrekiko proportzioan kalkulatzen dira.

Oro har, 0 aldia oinarritzat duen t aldiko indize bat honela adieraziko dugu: I_0^t

12.3 Indize sinpleak

Indize sinpleak aldagai bakar baten bilakaera (prezio edo kopuru bakar batena) zehazten duten zenbaki indizeak dira. Zenbaki indize sinpleen kalkulua oso erraza da, eta aldagai batzuen baterako bilakaera aztertzen duten *indize konplexuen* problematikarik ez dute.

12.3.1 Indize sinpleak seriean

Indize sinpleak **seriean** daudela esango dugu oinarri finkoa dutenean. Honela kalkulatzen dira, beraz, x_t aldagaiaren bilakaera izanik $t = 0, 1, 2, \ldots$ unetan:

$$I_0^t = \frac{x_t}{x_0} \times 100$$

Adibidez, honako taula honetan produktu baten prezioak jasotzen dira urtez urte lehenengo bi zutabeetan. Azken zutabean, 2011 urtea oinarritzat hartzen duen indize sinpleen segida jasotzen da:

Urtea	*Prezioak*	I_{2011}^t
2011	484	100
2012	525	$\frac{525}{484} \times 100 = 108.47$
2013	607	$\frac{607}{484} \times 100 = 125.41$
2014	622	$\frac{622}{484} \times 100 = 128.51$
2015	708	$\frac{708}{484} \times 100 = 146.28$

Honela interpretatzen da: adibidez, 2014 urtean prezioak %28.41 handiagoak dira 2011 urtean baino. Ikus daiteke horrela prezioaren hazkundea konstantea dela, baina 2014 urtean nabarmen moteldu zela.

12.3.2 Indize sinpleak katean

Indize sinpleak **katean** daudela esango dugu aldi bakoitzean oinarri-aldia aurreko aldia denean. Oinarri aldakorreko indize sinpleak ere deitzen zaie, eta urtez urteko gehikuntza portzentualak adierazten dituzte. Honela kalkulatzen dira, beraz:

$$I_{t-1}^t = \frac{x_t}{x_{t-1}} \times 100$$

Aurreko adibidea garatuz adibidez:

$Urtea$	$Prezioak$	I_{t-1}^{t}
2011	484	100
2012	525	$\frac{525}{484} \times 100 = 108.47$
2013	607	$\frac{607}{525} \times 100 = 115.62$
2014	622	$\frac{622}{607} \times 100 = 102.47$
2015	708	$\frac{708}{622} \times 100 = 113.83$

Adibidez, 2014 urtean prezioak aurreko urtean baino %2.47 garestiagoak izan ziren.

Zenbaki indize sinpleak katean seriean emandako indizeetatik ere kalkula daitezke:

$$I_{t-1}^{t} = \frac{I_0^t}{I_0^{t-1}} \times 100 = \frac{\frac{x_t}{x_0}}{\frac{x_{t-1}}{x_0}} \times 100 = \frac{x_t}{x_{t-1}} \times 100$$

Adibidez, aurreko adibidean:

$$I_{2013}^{2014} = \frac{I_{2011}^{2014}}{I_{2011}^{2013}} \to 102.47 = \frac{128.51}{125.41}$$

12.4 Indize konplexuak

Indize konplexuen helburua prezio batzuen, eta ez bakar baten, bilakaera aztertzea da. Horietan problematika nagusia aldagai horietan izandako aldaketak aldaketa osoa kalkulatzeko nola bateratzea da. Irtenbide sinpleena prezio guztiak neurri berean haztatzea edo guztiei pisu edo garrantzi berdina ematea. Baina ohikoena prezioei haztapen ezberdina eman behar izatea izango da, produktuak kopuru ezberdinetan ekoitzi, saldu edo kontsumitzen direnez. Horrela, *haztatu gabeko indize konplexuak* eta *indize konplexu haztatuak* bereiziko dira.

12.4.1 Haztatu gabeko indize konplexuak

Esan bezala, **haztatu gabeko indize konplexuak** barnehartzen dituzten prezioen aldaketak haztatu edo zuzen haztatzen ez dituzten haiek dira. Haien artean bereizten diren metodo eta formuletan honako hauek azalduko dira: *Carli indizeak*, *Jevons indizeak* eta *Dûtot indizeak*.

Noski, ez dira indize egokienak prezioetarako, prezioei eman beharreko haztapen edo pisua ezberdina izan behar delako, eta horien kontsumoaren araberakoa. Soilik antzeko diren produktuetarako eta produktu baten aldaeretarako eta beti unitate berdinekin (prezioak kiloko adibidez) kalkulatu beharko lirateke. Hori dela eta, prezio-aldaketak neurtzerakoan, soilik produktuen agregazio-maila txikienean kalkulatzen dira, hala nola sagarren kasuan, sagar mota ezberdinen prezioetarako, edota haztapenei buruzko informaziorik ez dagoenean.

12.4.1.1 Carli indizeak

Carli indizeak (batzuetan, Sauerbeck indizea ere deiturik) prezio bakoitzeko indize sinpleak kalkulatu eta horien batezbesteko aritmetiko sinplea kalkulatzen du, k izanik bateratu beharreko prezio kopurua:

$$C_{p0}^t = \overline{I}_t \times 100 = \frac{1}{k}\sum_i I_{i0}^t \times 100 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \times 100$$

Urtea	Garia	Artoa	Oloa	I_G	I_A	I_O	C_0^t
2010	10	20	30	100	100	100	100
2011	12	23	33	$\frac{12}{10} \times 100 = 120$	$\frac{23}{20} \times 100 = 115$	$\frac{33}{30} \times 100 = 110$	$\frac{120+115+110}{3} = 115$
2012	11	22	42	$\frac{11}{10} \times 100 = 110$	$\frac{22}{20} \times 100 = 110$	$\frac{42}{30} \times 100 = 140$	$\frac{110+110+140}{3} = 120$

Emaitza horien arabera, prezioak %15 igo dira 2011n 2010 urteari buruz, eta %20 2012an.

12.4.1.2 Jevons indizeak

Jevons indizeak prezio bakoitzeko indize sinpleak kalkulatu eta horien batezbesteko geometrikoa kalkulatzen du:

$$J_{p0}^t = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{\frac{1}{k}} \times 100 = \frac{\prod_{i=1}^{k} p_{it}^{\frac{1}{k}}}{\prod_{i=1}^{k} p_{i0}^{\frac{1}{k}}} \times 100$$

12.4.1.3 Dûtot indizeak

p_{it} t aldi ezberdinetan jasotako $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prezioak izanik, honela definitzen Dûtot prezio-indizea (Bradstreet-Dûtot indize ere deitua):

$$D_0^t = \frac{\sum_{i=1}^k p_{it}}{\sum_{i=1}^k p_{i0}} \times 100$$

Indize hau batez besteko prezioen ratioa dela ere esan daiteke, batezbestekoa batezbesteko aritmetiko sinplearen formularekin kalkukaturik:

$$D_{p0}^t = \frac{\overline{p}_t}{\overline{p}_0} \times 100 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^k p_{it}}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^k p_{i0}}{n}} \times 100 = \frac{\sum_{i=1}^k p_{it}}{\sum_{i=1}^k p_{i0}} \times 100$$

Adibidez, ondoko taulan 3 zerealen prezioen bilakaera jasotzen da tonako eta eurotan, Dûtot indizeak batez besteko prezioetatik kalkulatuz eta oinarri alditzat 2010 urtea hartuz:

Urtea	Garia	Artoa	Oloa	Batez besteko prezioa	D_0^t
2010	10	20	30	20	100
2011	10	20	33	21	$\frac{21}{20} \times 100 = 105.00$
2012	11	20	30	20.33	$\frac{20.33}{20} \times 100 = 101.66$

Indize hauen ezaugarri interesgarriena prezioei ematen dien haztapen edo pisuei buruzkoa: prezioen batuketa egiten duenez, printzipioz haztapen berdina emango lieke prezioei, baina batuketa horren zeharkako ondorio gisa haztapen edo pisu handiena prezio-aldaketa handiena hartzen duela esan daiteke. Adibidean ikusten denez, 2011 eta 2012 urteetan prezio-aldaketa produktu bakar batean gertatzen da, eta %10ekoa da bietan, baina 2011 urtean zereal garestian gertatzen da, eta 2012 urtean zereal merkean; eta hala indizeak igoera handiagoa ematen du 2011 urterako, zeina ez den batere zuzena, igoera kontsumoaren araberakoa eta prezioaren araberakoa gertatu beharko litzatekeelako.

Indize honen beste oztopo bat prezioen unitateekin du zerikusia, produktu ezberdinetako prezioen baturak edo horien batezbestekoak esanahi argirik ez duelako. Esanahia guztiz desitxuratua gera ez dadin, gutxienez prezioak kopuru berdinetarako emanak (prezio guztiak kiloko, adibidez) izan behar dira.

12.4.2 Indize konplexu haztatuak

bf Indize konplexu haztatuetan prezioei haztapen edo pisu ezberdinak ematen zaizkie, produktuak kontsumitzen diren kopuruen arabera:

$$I_{p0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i I_{i0}^{t}}{\sum_{i=1}^{k} w_i} \times 100$$

non n kontsideratutako produktuen kopurua den. Beraz, Carli indizeetan batezbesteko aritmetiko sinplea erabiltzen den bitartean, indize konplexu haztatuetan batezbesteko aritmetiko haztatua erabiltzen da.

Indize konplexu haztatu hauek bereizten dira: Laspeyres indizeak, Paasche indizeak, Marshal-Edgeworth indizeak eta Fisher indize idealak.

12.4.2.1 Laspeyres indizeak

L_p **Laspeyres prezio-indizeek** (Ernst Louis Étienne Laspeyres, 1834 - 1913, alemaniar ekonomialaria) oinarri aldiko gastua produktu bakoitzeko, $p_{i0}q_{i0}$, hartzen dute haztapen-koefizientetzat:

$$L_{p0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{i0}I_{i0}^{t}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{it}q_{i0}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{i0}}$$

Gogoratu azken emaitza bider 100 egin ohi dela, portzentajea emateko.

Laspeyres indizearen abantaila nagusia sinpletasuna, haztapenak konstanteak baitira indizearen kalkulu osoan zehar, eta beraz aski dira oinarri aldiko kontsumoak kalkuluak egiteko. Oztopo gisa, ordea, haztapen hauek adierazgarritasuna galtzen doazela aipatu behar da, aldi bakoitzeko kontsumoak aldatu ahala. Gainera, kontuan hartu behar da prezio igoera handienei dagozkien produktuen eskaria gutxitzen doala orokorrean, eskariaren legearen arabera, eta horrela Laspeyres indizeak prezio igoera handienak gehiegiz haztatzen ditu, eta prezio igoera orokorra puztu hartara. Azken fenomeno horri ordezte-efektua eta, ingelesez, *substitution bias* deitzen zaio.

Adibidez, enpresa batek 1, 2, eta 3 zenbakidun lehengaiak kontsumitzen ditu eta horien prezioen bilakaera jaso du 3 urtetan zehar, horien lehenengo urteko q kontsumo fisikoekin batera:

Urtea	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
2010	10	20	30	5	10	15
2011	11	24	39	-	-	-
2012	12	26	43	-	-	-

Laspeyres indizea eman behar dira oinarri alditzat 2010 harturik. Indizearen kalkulu sinpleena formularen azken adierazpenarekin egiten dugu:

$$L_{p2010}^{2011} = \frac{11 \times 5 + 24 \times 10 + 39 \times 15}{10 \times 5 + 20 \times 10 + 30 \times 15} \times 100 = 125.71$$

$$L_{p2010}^{2012} = \frac{12 \times 5 + 26 \times 10 + 43 \times 15}{10 \times 5 + 20 \times 10 + 30 \times 15} \times 100 = 137.85$$

Emaitza horien arabera, prezioak %25.71 igo dira 2011n 2010 urteari buruz, eta %37.85 2012an.

12.4.2.2 Paasche indizeak

P_p **Paasche prezio-indizeek** (Hermann Paasche, 1851-1925, alemaniar ekonomialaria) aldi bakoitzeko gastua produktu guztietarako, $\sum_{i=1}^{n} p_{it}q_{it}$ hartzen dute haztapen-koefizientetzat:

$$P_{p0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{it}I_{i0}^{t}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{it}\frac{p_{it}}{p_{i0}}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{it}q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{it}}$$

Paasche indizearen abantaila haztapenen eguneratzea da, aldi bakoitzeko kontsumoen arabera, eta beraz prezio igoera *errealagoak* ematen ditu. Oztopo gisa ordea, kontsumoen araberako haztapenak aldatzen doazenez, prezio-indizearen aldaketak prezio-aldaketekin baina baita kontsumo-aldaketekin ere egon daitezke loturik. Kontsumoen eguneratzeak datu-bilketa lan handiagoa ere eskatzen du: aldi guztietako kontsumoak behar dira kalkuluak egiteko. Azkenik, prezioak jaisten dituzten produktuak gehiegiz haztatzen ditu, horien eskaria handitu egiten denez. Bereziki eskatzen duen kontsumoei buruzko datu bilketa handiagatik, ez da asko erabiltzen praktikan, eta gehienetan Laspeyres formula erabiltzen da, hala nola KPI Kontsumorako Prezioen Indizea kalkulatzeko.

Aurreko adibidea harturik, urte guztietako kontsumoak gaineratzen ditugu Paasche indizeak kalkulatzeko:

Urtea	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
2010	10	20	30	5	10	15
2011	11	24	39	4	8	10
2012	12	26	43	4	7	6

Paasche indizea eman behar dira oinarri alditzat 2010 harturik. Indizearen kalkulu sinpleena formularen azken adierazpenarekin egiten dugu:

$$P_{p2010}^{2011} = \frac{11 \times 4 + 24 \times 8 + 39 \times 10}{10 \times 4 + 20 \times 8 + 30 \times 10} \times 100 = 125.20$$

$$P_{p2010}^{2012} = \frac{12 \times 4 + 26 \times 7 + 43 \times 6}{10 \times 4 + 20 \times 7 + 30 \times 6} \times 100 = 135.55$$

Emaitza horien arabera, prezioak %25.20 igo dira 2011n 2010 urteari buruz, eta %35.55 2012an.

12.4.2.3 Marshal-Edgeworth indizeak

Marshall-Edgeworth indizeek oinarri aldiko kontsumoak nahiz urte bakoitzeko kontsumoak hartzen dituzte kontuan; hartara, Laspeyres eta Paasche indizeen bitartean daude. Hona hemen horien formulak:

$$ME_{p0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{it}(q_{i0} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0}(q_{i0} + q_{it})}$$

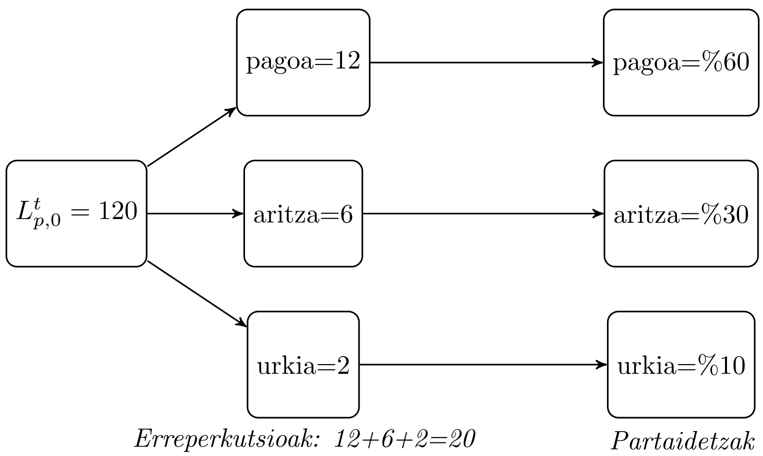
12.4.2.4 Fisher indize ideala

Zenbaki indizeei buruz propietate komenigarri batzuk ezarri dira. Propietate horietako gehienak eta garrantzitsuenak betetzen dituen indizea **Fisher indize ideala** deitzen dena da, Laspeyres eta Paasche indizeen batezbesteko geometrikoa besterik ez dena:

$$F_{p0}^{t} = \sqrt{L_{p0}^{t} \times P_{p0}^{t}}$$

12.5 Erreperkutsioa eta partaidetza

Prezio-aldaketei buruz, **erreperkutsioak** indize batek adierazten duen igoeran, puntu portzentualetan, produktu batek ekarri duen puntu kopurua adierazten du. **Partaidetzak**, berriz, erreperkutsioaren portzentajea adierazten du igoera totalean.



Laspeyres indizeetan honela kalkulatzen dira **erreperkutsioak**:

$$R_{it} = \frac{\Delta p_{it} q_{io}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0} q_{i0}}$$

Arestiko adibideko harturik, kalkula ditzagun erreperkutsioak:

- $R_{1,2011} = \frac{1\times 5}{10\times 5+20\times 10+30\times 15} = 0.71$
- $R_{2,2011} = \frac{4\times 10}{10\times 5+20\times 10+30\times 15} = 5.71$
- $R_{3,2011} = \frac{9\times 15}{10\times 5+20\times 10+30\times 15} = 19.28$

Ohartu behar da hiru erreperkutsioen batura bat datorrela indizearen gehikuntza totalarekin (0.71+5.71+19.28=25.71)

Kalkula ditzagun orain partaidetzak:

- $P_{1,2011} = \frac{0.71}{25.71} = \%2.7$
- $P_{2,2011} = \frac{5.71}{25.71} = \%22.3$
- $P_{3,2011} = \frac{19.28}{25.71} = \%75$

Partaidetzen batura %100 da, noski.

Ikusten denez, prezio-igoera orokorrean eragin handiena izan duen gaia hirugarrena izan da, aldaketa totalaren %75a eraginez.

12.6 Indize kuantikoak

Indize kuantikoak p prezioenak ez, baizik eta q kopuru fisikoen aldaketak jasotzen dituzten horiek dira. Metodologia prezio-indizeen berdina da: sinpleena kopuruen indize sinpleak kalkulatzea da, baina egokiena kopuru horien aldaketak haztatzea izaten da, prezioen arabera:

- indize sinplearekin,

$$C_{q0}^{t} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{q_{it}}{q_{i0}} \times 100$$

- Laspeyres indizearekin,

$$L_{q0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{it}p_{i0}}{\sum_{i=1}^{k} q_{i0}p_{i0}}$$

- Paasche indizearekin,

$$P_{q0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} q_{it}p_{it}}{\sum_{i=1}^{k} q_{i0}p_{it}}$$

Adibidez, enpresa batek kontsumitzen dituen gaien kontsumoak eta prezioak zehazten dira ondoren, 3 urtetan zehar. Kontsumitutako kopuruen indizeak kalkulatu behar dira, oinarri alditzat 2010 urtea harturik:

Urtea	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3
2010	10	20	30	5	10	15
2011	11	24	39	4	8	10
2012	12	26	43	4	7	6

- Carli indize sinplearekin,

$$C_{q2010}^{2011} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{10} + \frac{10}{15}\right) \times 100 = 75.53$$

$$C_{q2010}^{2012} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{6}{15}\right) \times 100 = 63.33$$

  Emaitza horien arabera, kontsumo fisikoak %24.47 jaitsi dira 2011n 2010 urteari buruz, eta %36.66 2012an.

- Laspeyres indizearekin,

$$L_{q2010}^{2011} = \frac{4 \times 10 + 8 \times 20 + 10 \times 30}{5 \times 10 + 10 \times 20 + 15 \times 30} \times 100 = 71.42$$

$$L_{q2010}^{2012} = \frac{4 \times 10 + 7 \times 20 + 6 \times 30}{5 \times 10 + 10 \times 20 + 15 \times 30} \times 100 = 51.42$$

Emaitza horien arabera, kontsumo fisikoak %28.58 jaitsi dira 2011n 2010 urteari buruz, eta %48.58 2012an.

- Paasche indizearekin,

$$P_{q2010}^{2011} = \frac{4 \times 11 + 8 \times 24 + 10 \times 39}{5 \times 11 + 10 \times 24 + 15 \times 39} \times 100 = 71.13$$

$$P_{q2010}^{2012} = \frac{4 \times 12 + 7 \times 26 + 6 \times 43}{5 \times 12 + 10 \times 26 + 15 \times 43} \times 100 = 50.57$$

Emaitza horien arabera, kontsumo fisikoak %28.87 jaitsi dira 2011n 2010 urteari buruz, eta %49.43 2012an.

12.7 Balio-indizeak

Balio indizeak p_i prezio eta q_i kopuruen baterako bilakaera, hots $\sum p_i q_i$ gastu totalaren bilakaera, jasotzen duten indizeak dira. Honela kalkulatzen dira:

$$B_{pq0}^{t} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{k} p_{i0} q_{i0}}$$

12.8 Indizeen propietateak: zirkulartasuna

Zirkulartasuna edo **iragankortasuna** zenbaki indizeek bete beharko luketen propietateetako bat da. Honela definitzen I indize baterako:

$$I_a^b \times I_b^c = I_a^c$$

Adibidez,

Urtea	Indizea
2010	100
2012	$I_{2010}^{2012} = 110$
2016	$I_{2012}^{2016} = 120$

$$I_{2010}^{2016}? \rightarrow I_{2010}^{2016} = 1.10 \times 1.20 = 131$$

Laspeyres eta Paasche indizeek ez dute zirkulartasunaren propietatea betetzen, baina indize sinpleek eta Fisher indize idealak bai.

12.8.1 Zirkulartasunaren aplikazioa: indizeak katean

Oinarri aldia finkoa denean, I_0^t indizeetan alegia, indizea seriean dagoela esaten da. Orduan, indizeak oinarri aldiari buruzko aldaketa portzentuala adierazten du. Beste batzuetan, ordea, interesgarriago dirudi, aldian aldiko aldaketak hobeto jarraitzeko, indizeak katean kalkulatzea, hots I_{t-1}^t ematea, oinarritzat aurreko aldia harturik.

Indizea zirkularra bada, indizeak katean serieango indizeetatik kalkulatzen dira, inongo errorerik gabe:

$$I_{t-1}^t = \frac{I_0^t}{I_0^{t-1}}$$

Indizea zirkularra ez bada ere, aurreko formula aplikatzen da kateango indizeak kalkulatu ahal izateko, baina orduan emaitzetan errorerik izango da, praktikan handia izaten ez den arren.

Adibidez, hurrengo taulan 2010 urtea oinarritzat harturik kalkulaturiko serieango indize segida daukagu, eta horretatik kalkulaturiko kateango indize segida:

Urtea	2010	2011	2012	2013
Indizeak seriean	100	110	120	135
Indizeak katean	100	110	$\frac{120}{110} \times 100 = 109.09$	$\frac{135}{120} \times 100 = 112.5$

12.8.2 Zirkulartasunaren aplikazioa: oinarri-aldaketa

Batzuetan, indize segida baten oinarri-aldia aldatu nahi da, 100 balioa beste aldi batean kokatu alegia. Eragiketa hori zehaztasunez egiteko indize zirkularra behar da, baina zirkularra izan gabe ere, onartu egiten da eragiketa, orduan errorea sortzen den arren.

Zirkulartasuna aplikatzeko, hirukoaren erregela sinple bat garatzen da. Adibidez, aurreko segida harturik, oinarri-aldia 2012ra aldatu nahi bada:

Urtea	2010	2011	2012	2013
Indizeak (o.: 2010)	100	110	120	135
Indizeak (o.: 2012)	$\frac{100}{120} \times 100 = 83.33$	$\frac{110}{120} \times 100 = 91.66$	100	$\frac{135}{120} \times 100 = 112.5$

Adibidez, 2013 urterako indize berria, 2012 oinarrikoa, hirukoaren erregela honekin zehazten da: 135 120rentzat, x 100entzat bezala (135/120=x/100).

Ohartu behar da indize berriak indize zaharrak 100/120 koefizientearekin biderturik kalkulatzen direla. Koefiziente horri birreskalatze-koefiziente deritzo.

12.9 Batez besteko hazkundea

Interesgarria da jakitea zenbat den zenbaki indizeen segida batean H urtez urteko batez besteko hazkundea, t_1 eta t_2 aldien artean. Horretarako batezbesteko geometrikoa erabiltzen da:

- serieango zenbaki indizeetarako:

$$H_{t_1}^{t_2} = \left(\frac{I_0^{t_2}}{I_0^{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1$$

- kateango zenbaki indizeetarako:

$$H_{t_1}^{t_2} = \left(\frac{I_{t_1}^{t_1+1}}{100} \times \frac{I_{t_1+1}^{t_1+2}}{100} \times \frac{I_{t_1+2}^{t_1+3}}{100} \times \cdots \times \frac{I_{t_2-2}^{t_2-1}}{100} \times \frac{I_{t_2-1}^{t_2}}{100} \right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}} - 1$$

Adibidez, kalkula dezagun urteko batez besteko hazkundea arestiko datuetarako, serieango edo oinarri finkoko indize hauek harturik:

Urtea	I_0^t
2010	100
2011	...
2012	...
2013	140

$$H_{2011}^{2015} = \left(\frac{140}{100}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.1186 = \%11.86 \; urteko$$

Eta katean kalkulaturiko indize hauetarako:

Urtea	I_{t-1}^t
2010	100
2011	120
2012	130
2013	160

$$H_{2011}^{2015} = (1.2 \times 1.3 \times 1.6)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.3564 = \%35.64 \; urteko$$

12.10 Deflaktazioa

Salmentak, produkzioak, kontsumoak, soldatak eta beste aldagai ekonomikoak moneta-unitate *nominaletan* neurtzen dira, hau da une bakoitzeko prezioetan. Kopuru horiei *kopuru nominal* deritze eta item batzuetarako, horien prezioekin batera, $\sum p_t q_t$ formulaz kalkulatzen dira.

Prezioen igoera dela eta, kopuru nominal horiek ez dute behar bezala adierazten errealki zenbat saldu, kontsumitu edo produzitzen den edo fisikoki zenbat eskuratu daitekeen soldatarekin. Adibidez, iaz baino 100 euro *nominal* irabazten baditut hilean, horrek ez du esan nahi *errealki* gehiago irabazten dudanik, balitekeelako inflazioak igoera hori jatea.

Aldi desberdinetako kopuru ekonomikoak alderatzeko, beraz, kopuru nominalak kopuru *errealetara* bihurtu behar dira, *une jakin eta zehatz* bateko prezio konstanteetara: $\sum p_0 q_t$.

Kopuru nominaletatik kopuru errealetara bihurtzeko eragiketari, inflazioaren eragina ezabatuz, **deflaktazio** deritzo. Deflaktatzerakoan, kopuru errealak zein aldiko prezio konstantetan jarri nahi diren ere zehaztu behar da, zein urtera deflaktatu nahi den alegia.

Deflaktatzeko deflaktatu nahi diren kopuruetan barneharturik dauden produktuen inflazioaren bilakaera adierazten duten indize bat, *deflaktatzaile* izenekoa, behar da. Adibidez, soldatak deflaktatzeko maiz KPI (Kontsumorako Prezioen Indizea) erabiltzen da, soldatarekin kontsumitzen ditugun produktuen prezioak jasotzen dituen indizea delako. KPI Laspeyres formulan oinarritzen da, eta beraz q_0 kontsumo kopuruak behar ditu. Kontsumo kopuru horien multzoari *erosketa-saskia* deritzo, eta urte batzuetan behin eratzen da, hurrengo urteetan Laspeyres formularako q_0 oinarria izateko.

Deflaktazioa kopuru nominalak prezio-indize egokiarekin (batekoetan) zatituz egiten da:

$$erreala_t = \frac{nominala}{I_{pt}}$$

Prezio-indizearen oinarria ez den beste aldi baterako deflaktatu nahi bada, aski da deflaktatu aurretik prezio-indizearen balioak oinarri berrira proportzionalki aldatzea.

Deflaktatzeko formula egokia Paasche indizea da, kopuru erreal zehatzak ematen dituelako, ondoren frogatzen denez:

$$\frac{nominala}{Paasche} = \frac{\sum p_t q_t}{\frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}} = \sum p_0 q_t = erreala$$

Hala ere, gehienetan eskura dagoen indizea estatistika ofizialetan Laspeyres da (KPI Laspeyres da), eta orduan deflaktazioan errore txiki bat sortuko da, ezinbestean onartu beharko duguna.

12.11 Ariketak

1. Lantegi batean hiru zur mota erabiltzen da: pagoa, aritza eta urkia. Hiru zur horien prezioen bilakaera (p, €/m^3) jaso da azken urteotan, urte horietan kontsumitutako kopuruekin (q, m^3) batera:

Urtea	p(pagoa)	p(aritza)	p(urkia)	q(pagoa)	q(aritza)	q(urkia)
2010	92	76	65	32	25	12
2011	95	77	62	33	28	14
2012	101	75	64	31	32	14
2013	105	80	68	32	30	18

(a) Hiru zuren prezioen indize sinpleak eman, seriean nahiz katean, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(b) Prezioei buruzko Carli indizea eman, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(c) Prezioei buruzko Dûtot indizea eman, oinarritzat 2010 urtea harturik. Zer esango zenuke kalkuluan pagoaren prezioa tonako emango balitz, eta besteak m^3-ko?

(d) Prezioei buruzko Laspeyres indizea eman, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(e) Laspeyres indizea kalkulatu, hiru zurek duten haztapen-koefizienteen bitartez.

(f) Prezioei buruzko Paasche indizea eman, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(g) Laspeyres eta Paasche indizeak alderatu.

(h) Prezioei buruzko Laspeyres indizean, hiru zuren erreperkutsioak eta partaidetzak kalkulatu 2011 urtean.

(i) Carli indize kuantikoak eman, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(j) Laspeyres indize kuantikoak eman, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(k) Paasche indize kuantikoak eman, oinarritzat 2010 urtea harturik.

(l) Balio indizeak eman eta interpretatu, oinarritzat 2010 urtea harturik, urte bakoitzeko gastu totalak formalki adieraziz eta kalkulatuz.

(m) 2010 oinarriko Laspeyres prezio-indizeak harturik, kateango indizeak kalkulatu behar da. 2013ko kateango Laspeyres indizea kalkulatu jatorriko datuekin eta aurreko emaitzarekin alderatu.

(n) i. 2010 oinarriko Laspeyres prezio-indizeak harturik, 2012 urtea oinarritzat duten indizeak kalkulatu.

ii. 2012 oinarriko Laspeyres prezio-indizeak kalkulatu, emandako prezio eta datuetatik, eta aurrekoekin alderatu. Zergatik dira ezberdinak?

(o) Pagoaren prezioaren hazkundearen batezbestekoa kalkulatu, seriean-go nahiz kateango indizeak harturik, 2010-2013 urte bitartean. Kateango indizeak harturik, zenbat igo da prezioa 2010-2012 bitartean? Emaitza zehatza al da?

(p) Hiru zuren baterako prezioen hazkundearen batezbestekoa kalkulatu 2010-2013 bitartean, Laspeyres prezio-indizeetatik, oinarritzat 2010 urtea harturik. Idem, 2011-2013 bitartean.

(q) Hiru zuren baterako kontsumoaren kopuru nominalak eta errealak, azken hauek 2010 urteko prezioetan, kalkulatu.

(r) Hiru zuren baterako kontsumoaren kopuru nominalak deflaktatu, 2010 eta 2012 urteko prezioetara, Laspeyres indizea baliatuz horretarako. Zergatik dira 2012ko kopuru errealak 2010ekoak baino handiagoak?

2. Euskal Herriko familien elikagai-gastuaren bilakaera zehazten da ondoren, elikagaien prezioen 2000 oinarriko indizearekin batera:

Urtea	Elikagai-gastua	Prezio-indizeak
2000	28	100
2001	29	105
2002	32	111
2003	34	115
2004	33	119
2005	36	122
2006	35	124
2007	31	127
2008	29	132

(a) Gastua 2005 urteko euro konstanteetara deflaktatu. Zein urtetan kontsumitu zen gehien urte horretako prezio konstanteetan?

(b) Zenbat igo ziren prezioak 2006 urtean 2005 urteari buruz?

(c) Zenbat izan beharko litzateke gastu nominala 2008 urtean 2005 urteko gastuaren berdina izateko termino errealetan?

(d) 2009 eta 2010 urteetarako prezio indizeak 138 eta 142 izatea espero bada, zenbat izan behar dira gastuak urte horietan 2008ko gastua baino %10 eta %15 handiagoak, hurrenik hurren, izateko termino errealetan?

3. Euskal Herriko metal sektoreko salmentak eta metal produktuen 2006 oinarriko prezio-indizearen bilakaera urte batzuetan zehar zehazten dira ondoren:

Urtea	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Salmentak	87	96	112	118	124	131
Prezio indizeak	100	105	111	115	119	122

(a) Salmentak 2010 urteko euro konstanteetara deflaktatu. Zein urtetan saldu zen gehien urte horretako prezioetan?

(b) 2012 urterako elikagaien prezioen indizea 129ra helduko dela aurresaten bada, zenbat saldu behar da aurreko urtearekin alderatuta salmentak berdin atxikitzeko prezio konstanteetan?

4. Jantzi-denda bateko salmentak jaso dira, 2008 oinarriko jantzi-prezioen indizeekin batera:

Urtea	2008	2009	2010	2011
Salmentak	1200	1350	1450	1600
Prezio indizeak	100	110	115	122

   (a) Salmentak deflaktatu, era sinpleenean (hau da, kalkulu gutxienak eginez). Errealki gora egin al dute salmentek lau urteko epean?

   (b) 2012 urterako %8ko prezio igoera espero bada, zenbat izan behar dira salmenta nominalak urte horretan, 2008ko salmenta errealen berdinak izateko?

Ebazpenak

(1) (a,b,c) atalak

Urtea	p_{pagoa}	p_{aritza}	p_{urkia}	Indize sinpleak seriean			Indize sinpleak katean			Carli indizeak	Dûtot indizeak
				pagoa	aritza	urkia	pagoa	aritza	urkia		
2010	92	76	65								
2011	95	77	62								
2012	101	75	64								
2013	105	80	68								

1. ariketa: (e)

Urtea	Indize sinpleak seriean			Haztapenak: $\frac{p_{io}q_{io}}{\sum p_{io}q_{io}}$			Laspeyres indizea
	Pagoa	Aritza	Urkia	Pagoa	Aritza	Urkia	
2010	100	100	100				100
2011				Oinarri aldiko gastu osoa: $\sum p_{io}q_{io} =$			
2012							
2013							

1. ariketa: (i)

	Indize kuantiko sinpleak			
Urtea	$I^t_{q0}(pagoa)$ (%)	$I^t_{q0}(aritza)$ (%)	$I^t_{q0}(urkia)$ (%)	C^t_{q0} (%)
2010	100	100	100	100
2011	$\frac{33}{32} = 103.13$	$\frac{28}{25} = 112$	$\frac{14}{12} = 116.67$	$\dfrac{103.13 + 112 + 116.67}{3} = 110.59$
2012	$\frac{31}{32} = 96.88$	$\frac{32}{25} = 128$	$\frac{14}{12} = 116.67$	113.84
2013	$\frac{32}{32} = 100$	$\frac{30}{25} = 120$	$\frac{18}{12} = 150$	123.33

Pagoaren kontsumo fisikoa %3.13 igo da 2011 urtean 2010 urteari buruz.

Hiru zuren kontsumo fisikoa %10.59 igo da 2011 urtean 2010 urteari buruz. Carli indizearen arabera, ordea, hiru zuren kontsumo fisikoaren igoerei haztapen berdina ematen zaie. Prezio ezberdinak dituztenez, horien arabera haztatzea egokiagoa da, Laspeyres edo Paasche erabiliz, hurrengo puntuetan egiten den bezala.

(l) atala

Urtea	Gastua ($\sum p_t q_t$)	Balio-indizea
2010		100
2011		
2012		
2013		

(m) eta (n) atalak

Urtea	$L^t_{p,2010}$	$\rightarrow$ Laspeyres katean: $L^t_{p,t-1}$	$\rightarrow L^t_{p,2012}$	$L^t_{p,2012}$ (kalkulu osoa datu guztiekin)
2010	100	100		
2011	101.5			
2012				
2013				
2013		$L^{2013}_{p,2012}$ (datu guztiekin)$=\frac{\sum p_{2013}q_{2012}}{\sum p_{2012}q_{2012}}=$		

(o)

Urtea	Pagoaren prezioa	Indizeak seriean	Indizeak katean
2010	92		
2011	95		
2012	101		
2013	105		

Seriean harturik:

$$H_{2010/13} = \qquad\qquad = 0.045 = \%4.5\ urteko$$

Katean harturik:

$$H_{2010/13} = \qquad\qquad = 0.045 = \%4.5\ urteko$$

Zirkulartasunez, hau da 2010-12 bitarteko igoera:

(p)

Urtea	$L^t_{p,2010}$
2010	100
2011	101.5
2012	
2013	

2010-13 bitartean, urteko batez besteko hazkundea hau da:

$$H_{2010/13} =$$

Eta 2011-13 bitartean:

$$H_{2011/13} =$$

(q) eta (r) atalak

Urtea	p(pagoa)	p(aritza)	p(urkia)	q(pagoa)	q(aritza)	q(urkia)
2010	92	76	65	32	25	12
2011	95	77	62	33	28	14
2012	101	75	64	31	32	14
2013	105	80	68	32	30	18

Urtea	Kopuru nominalak: $\sum p_t q_t$	Kopuru errealak: $\sum p_{2010} q_t$
2010		5624 (definizioz)
2011		
2012		
2013		

Urtea	Kontsumo nominalak	$L^t_{p,2010}$	Kontsumo errealak (p:2010)	$L^t_{p,2012}$	Kontsumo errealak (p:2012)
2010	5624	100		95.73	
2011	6159	101.51		97.15	
2012	6427	104.46		100	
2013	6984	109.82		104.98	

(2) ariketa

(a) atala

Urtea	Gastu nominala	$I_{p,2000}$		Gastu erreala (p: 2005)
2000	28	100		
2001	29	105		
2002	32	111		
2003	34	115		
2004	33	119		
2005	36	122		
2006	35	124		
2007	31	127		
2008	29	132		

(3) ariketa

(a) atala

Urtea	Salmenta nominalak	$I_{p,2006}$	$I_{p,2010}$	Salmenta errealak
2006	87	100	84.03	103.53
2007	96	105	88.24	108.80
2008	112	111	93.28	120.07
2009	118	115	96.64	122.10
2010	124	119	100	124
2011	131	122	102.52	127.77

(b) atala

Beraz, 2012an salmenta errealak 127.77 izatea bilatzen da.

2012ko indizea 129ra heltzen bada, 2010eko oinarrira aldatua 129/119=1.084=108.4 izango da. Hartara:

$$nominala(2012) = erreala_{p:2010}(2012) \times I_{p,2010}^{2012} = 127.77 \times 1.084 = 138.50$$

Finean, salmenta nominalak eskuratzeko helburu diren salmenta errealak inflazio-tasarekin bidertu egiten ditugu.

Beste era honetara ere ebatz daiteke: prezioen indizea 2012 urtean 129 heltzekoa bada, 2011 urtearekin alderatuz prezioak 129/122=1.057=%5.7 igo behar direla aurresaten dela esan nahi du; 2011 urtean 122 saldu zenez, termino erreal edo konstanteetan berdin atxikitzeko, salmenta nominalak $131 \times 1.057 = 138.5$ izan beharko direla esan nahi du.

(4) ariketa

(a) atala

Kalkulu gutxienak egin nahi badira, oinarri-aldaketarik ez da egingo indizean, hau da, 2008 urteko prezioetara deflaktatuko dira salmentak

Urtea	Salmenta nominalak	$I_{p,2008}$	Salmenta errealak
2008	1200	100	1200
2009	1350	115	1350/1.10=1227.28
2010	1450	119	1450/1.15=1260.87
2011	1600	122	1600/1.22=1311.47

(b) atala

2012 urterako %8ko prezio-igoera espero bada (aurreko urteari buruz suposatzen dugu), 2012ko prezioen indizea $122 \times 1,08 = 131.76$ izatea aurresaten dela esan nahi du. Orduko salmenta errealak 1200 izatea nahi denez, salmenta nominalak hauek izango dira:

$$nominala(2012) = erreala_{p:2008}(2012) \times I_{p,2008}^{2012} = 1200 \times 1.3176 = 1581.12$$