

Probabilitate-teoria

Xurgapen-denborak Markov kateetan

Josemari Sarasola

Gizapedia



Zer den Markov kate bat

Markov-en kate bat egoera diskretuen multzo bat da, batetik bestera pasatzeko probabilitate jakinekin. Probabilitate horiei trantsizio-probabilitate deitzen zaie, **eta azken egoeraren mendean daude beti**. Adibidez, egunak euritsu-ateri (e/a) sailkatzen dira, eta egun bateko eguraldia bezperako eguraldian mendean dago soilik.

Trantsizio-matrizeak

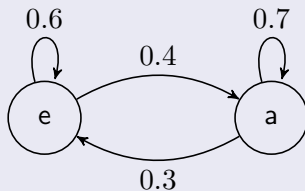
Markov-en kateak trantsizio-matrizeen bitartez definitzen dira, non i egoera batetik j egoera batera igarotzeko p_{ij} probabilitateak zehazten diren, i egoeraren mendean soilik. Adibidez, eguraldiaren adibidea harturik:

$$\begin{array}{ll} p_{ea} = 0.4 & p_{ee} = 0.6 \\ p_{aa} = 0.7 & p_{ae} = 0.3 \end{array}$$

Esate baterako, bezpera euritsua izanda, biharamunean ateri izateko probabilitatea 0.4 da. Horrela definituta, errenkadako baturak 1 izan behar dira beti.

Markov-en kateak grafo baten bitartez

Markov kateak grafo baten bitartez ere irudikatu daitezke:



Xurgapen-egoerak

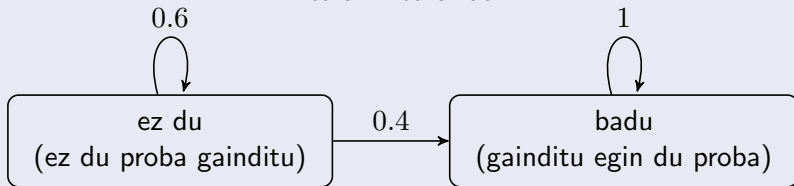
Markov-en kate batean egoera bat xurgapen-egoera dela esaten da, bertara iritsita bertatik ezin denean ateratu.

Beste era batera esanda, i egoera xurgapen-egoera da $p_{ii} = 1$ betetzen denean.

Xurgapen-egoerak (1. adibidea)

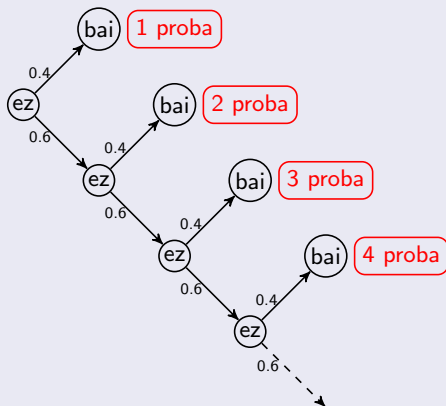
Adibidez, ikasle batek titulu bat eskuratzeko proba egiten du behin eta berriz harik eta gainditzen duenera arte. Behin gaindituta, inork ez dio titulua kenduko: gainditu eta titulua izatea xurgapen-egoera da. Azterketa aprobatzeko probabilitatea 0.4 bada, honela irudikatzen da dagokion Markov katea:

Titulurik ba al du?



Batez besteko xurgapen-denborak

Zenbat aldiz burutu behar da proba batezbeste titulua lortu arte? Probabilitate-zuhaitz bat era dezakegu (gorriz titulua lortu arte zenbat proba burutzen diren adierazten da):



Batez besteko xurgapen-denborak

Eman dezagun titulua lortu arteko proba kopuruaren batezbestekoa:

Probak (x)	Probabilitatea (p(x))	xp(x)
1	0.4	1×0.4
2	0.6×0.4	$2 \times 0.6 \times 0.4$
3	$0.6^2 \times 0.4$	$3 \times 0.6^2 \times 0.4$
4	$0.6^3 \times 0.4$	$4 \times 0.6^3 \times 0.4$
...	...	...
		$\sum t \times 0.6^{(t-1)} \times 0.4$

Batez besteko xurgapen-denborak

Alde batetik, serie aritmetiko-geometriko honen batura burutuz (batura baten deribatua deribatuen batura da):

$$\sum tx^{t-1} = \sum \frac{dx^t}{dx} = \frac{d \sum x^t}{dx} = \frac{d \frac{1}{1-x}}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Gure seriera aplikatuz:

$$\sum t \times 0.6^{(t-1)} \times 0.4 = 0.4 \sum t \times 0.6^{(t-1)} = \frac{0.4}{(1-0.6)^2} = 2.5$$

Beraz, batezbeste 2.5 proba beharko ditu ikasleak titulua lortzeko.

Batez besteko xurgapen-denborak

Aurreko kalkulu konplexuak (adibide guztiz sinplea dela kontuan hartuta gainera) saihesten dituen metodoa ere badago. Titulua lortzeko proba kopuru hauek burutu behar ditu:

- proba bakarra, 1, proba gainditzen badu;
- proba bat (egin duena) gehi berriz ere batezbeste behar duena titulurik ez duela titulua lortzeko (ezezkotik baiezkoa)
($E[T_{ez \rightarrow bai}]$)

$T_{ez \rightarrow bai}$	$p[T_{ez \rightarrow bai}]$	$Tp[T]$
1	0.4	0.4
$1 + E[T_{ez \rightarrow bai}]$	0.6	$0.6 + 0.6E[T_{ez \rightarrow bai}]$
	1	$E[T_{ez \rightarrow bai}] = 1 + 0.6E[T_{ez \rightarrow bai}]$

Batez besteko xurgapen-denborak

Azkenean ekuazio guztiz sinplea geratzen zaigu:

$$E[T_{ez \rightarrow bai}] = 1 + 0.6E[T_{ez \rightarrow bai}]$$

$$0.4E[T_{ez \rightarrow bai}] = 1$$

$$E[T_{ez \rightarrow bai}] = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

Ikusten denez, metodo honekin askoz ere sinpleago lortzen dugu azken emaitza.

Notazioari buruzko oharra

Itxaropenak beti helmuga edo xurgapen-egoerarako kalkulatzeko direnez, ezabatu egingo ditugu notaziotik ariketak egiterakoan, ebazpenak eta azalpenak erosoago egiteko:

$$T_{ez \rightarrow bai} = T_{ez}$$

Xurgapen-denborak Markov-en kateetan

Ariketak

Xurgapen-denborak: ariketak

1: Txanpon bat jaurtitzen da XOO sekuentzia, ordena horretan, suertatu arte. Zenbat aldiz jaurti behar da batezbeste?

2: Merkatu batean hiru markak jarduten dute. C marka liderra da, horrenbestearino non kontsumitzaile batek marka hori erosita, ja ez du aurrerantzean bestelako markarik erosiko. A eta B markako mugikorren iraupen-bizitzak 2 eta 3 urtekoak dira. Trantsizio matrizea hau da (a markatik b markara igarotzeko probaibiltatea 0.5, adibidez):

$$p(aa) = 0.2 ; \quad p(ab) = 0.5 ; \quad p(ac) = \text{---}$$

$$p(ba) = 0.1 ; \quad p(bb) = 0.3 ; \quad p(bc) = \text{---}$$

Kalkulatu c marka erosi arteko batezbesteko denbora, bi kasu hauetan:
(i) a mugikorra dauka baina segituan berrituko du; (ii) b mugikorra dauka baina segituan berrituko du.

Problema berdina garatu, baino C marka liderra ez dela kontsideratuz eta beste marketarako trantsizio-probabilitate hauek dituela:

$$p(ca) = 0.3; \quad p(cb) = 0.4; \quad p(cc) = \text{---}$$

Xurgapen-denborak: ariketak

3: Akzio baten igoera edo jaitsiera egun batean aurreko eguneko bilakaeraren mende dago trantsizio matrize honen arabera:

$$p(\uparrow / \downarrow) = 0.4 ; \quad p(\downarrow / \downarrow) = 0.6$$

$$p(\downarrow / \uparrow) = 0.7 ; \quad p(\uparrow / \uparrow) = 0.3$$

Adibidez, akzioak behera egin bazuen, gaur gora egiteko probabilitatea 0.4 da. Akzio batek bi egunetan jarraian gora egiten badu, akzio horren salerosketak egun batez eteten dira. Bi egunetan jarraian behera egiten badu berriz, bi egunez eteten dira. Zenbat egun pasako dira batezbestez hiru aldiz jarraian gora egiteko? Oharra: Atzo eta herenegun kotizazioa etenda egon zen aurretik behera eginda.

Xurgapen-denborak: ariketak

4: Amazoniako indigena batek ehizaki bat ufatutuz jo nahi du. Haren aurka gezia botatzen duen bakoitzean bi gauza gerta daitezke: geziak jo eta ehizakia akabatzea, ez jo eta haren aurka beste gezi bat bota behar izatea eta ez jo, ehizakia konturatu, ihes egin eta beste ehizaki batekin prozesua abiaraztea. Ehizakiaren geziak jotzeko probabilitatea haren aurka bota duen gezi kopuruarekin batera doa goraka: lehenengoak 0.2 probabilitateaz jotzen du, bigarrenak 0.4ko probabilitateaz eta hirugarrenak eta laugarrenak 0.6 eta 0.8 probabilitateaz. Aldi bakoitzean ehizakia konturatu eta izututa ihes egiteko probabilitatea 0.2 da beti. Zenbat gezi bota behar ditu batez beste ehizaki bat akabatu arte?