ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

2019ko azterketa ebatziak (lehen zatiak)

Donostiako Ekonomia eta Enpresa Fakultatea
Euskal Herriko Unibertsitatea

Egilea eta irakasgaiaren irakaslea:
Josemari Sarasola

Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

Irakaslea: Josemari Sarasola

Data: 2019ko maiatzaren 20a, 10:00

I. ebazkizuna: Fisher proba zehatza *(1.25 puntu)*

Denda batera sartzen diren bezeroen artean, sexua eta azkenean erosketa egin duten ala ez jaso dira. Honako hauek dira emaitzak:

Sexua (↓) / Erosi al du? (→)	Bai	Ez
Emakumea	8	4
Gizona	3	9

Egin beharreko atazak:

(a) Erosten duten 8 emakumeak pibote harturik, sexua eta erosteko joera independenteak/dependenteak diren proba ezazu, Fisher proba zehatza baliatuz. Adierazgarritasun-maila: %10.

(b) Berdina egin ezazu erosten duten 3 gizonak pibote harturik.

Laguntza: $\binom{24}{12} = 2704156$

II. ebazkizuna: Bernoulli prozesuak *(1.25 puntu)*

Bezero bat dendara sartu eta erosketa egiteko probabilitatea 0.2 da. Bezeroak elkarrekiko independenteak dira. **Egin beharreko atazak:**

(Oharra: (a), (b) eta (c) ataletan ez da beharrezkoa azken emaitza kalkulatzea, nahikoa da probabilitatea nola kalkulatzen den adieraztea.)

(a) Zenbat da 12 bezeroetatik zerbait erosten dutenak 10 edo gehiago izateko probabilitatea?

(b) Zenbat da lehenengo erosketa gauzatu arte erosten ez dutenak 4 izateko probabilitatea? Zenbat da lehenengo erosketa gauzatu arte erosten ez dutenen kopuruaren itxaropena?

(c) Zenbat da hirugarren erosketa gauzatu arte, 8 bezero (erosleak nahiz ez erosleak) sartu behar izateko probabilitatea?

(d) Larunbatean 14 bezero sartu eta bakar batek erosi zuen. Egun horretan erosteko joera jaitsi zela erabaki al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %5.

III. ebazkizuna: Poisson prozesuak *(1.25 puntu)*

Eguneko 8 orduz egiten da lana lantoki batean. Egunean gertatzen den geldialdi kopurua Poisson banaketaren araberakoa da, batezbestekoa 4.2 izanik.

Egin beharreko atazak:

(a) Zenbat da geldialdi batetik bestera 2 ordu baino gutxiago izateko probabilitatea?

(b) Zenbat da 40 egunetan 150 geldialdi baino gehiago izateko probabilitatea?

IV. ebazkizuna: LTZ *(1.25 puntu)*

Eguneko ur kontsumoa herri batean uniformeki banatzen da 10-30 Hl. tartean. Egun ezberdinetako kontsumoak independenteak dira.

Egin beharreko atazak:

(a) Zenbat da 1000 Hl.rekin 45 egunetarako nahikoa izateko probabilitatea?

(b) Eman 100 egunetako ur kontsumo minimoa %99ko probabilitatearekin.

I. ebazkizuna: Fisher proba zehatza *(1.25 puntu)*

Denda batera sartzen diren bezeroen artean, sexua eta azkenean erosketa egin duten ala ez jaso dira. Honako hauek dira emaitzak:

Sexua (↓) / Erosi al du? (→)	Bai	Ez
Emakumea	8	4
Gizona	3	9

Egin beharreko atazak:

(a) Erosten duten 8 emakumeak pibote harturik, sexua eta erosteko joera independenteak/dependenteak diren proba ezazu, Fisher proba zehatza baliatuz. Adierazgarritasun-maila: %20.

(b) Berdina egin ezazu erosten duten 3 gizonak pibote harturik.

Laguntza: $\binom{24}{12} = 2704156$

(a)

Hipotesi nuluan, bi aldagaiak independenteak direla irizten da.

Kontingentzia taulako maiztasun teorikoak kalkulatu behar dira (parentesien artean; adibidez lehen gelaskarako: $11 \times 12/24 = 5.5$):

Sexua (↓) / Erosi al du? (→)	Bai	Ez	Totalak
Emakumea	8 (5.5)	4 (6.5)	12
Gizona	3 (5.5)	9 (6.5)	12
Totalak	11	13	24

Proba alde bikoa da, independentzia maiztasun enpirikoa teorikoa baino nabarmen handiagoa zein txikiagoa denean baztertzen delako. Beraz, p balioa $\alpha/2$-rekin alderatu behar da.

Pibote gisa 8 harturik, emakume erosleak independentzia balitz 5.5 lirateke. Beraz, 8 *asko* da. Eta beraz, *gorako* probabilitatea kalkulatu behar da, gelaska horretan 8 emakume edo gehiago izatekoa:

$$P[X \geq 8] = P[8,9,10,11] = \frac{\binom{11}{8}\binom{13}{4}}{\binom{24}{12}} + \frac{\binom{11}{9}\binom{13}{3}}{\binom{24}{12}} + \frac{\binom{11}{10}\binom{13}{2}}{\binom{24}{12}} + \frac{\binom{11}{11}\binom{13}{1}}{\binom{24}{12}} = 0.04976636$$

p balioa adierazgarritasun-mailaren erdia (%10) baino txikiagoa denez, hipotesi nulua, independentzia alegia, baztertu eta sexua eta erosketa loturik daudela erabaki behar da.

(b)

Pibote gisa 3 harturik, gizon erosleak independentzia balitz 5.5 lirateke. Beraz, 3 *gutxi* da. Eta beraz, *beherako* probabilitatea kalkulatu behar da, gelaska horretan 3 gizon edo gutxiago izatekoa. Taula berregin eta probabilitatea modu berean kalkulatzen dugu:

Sexua (↓) / Erosi al du? (→)	Bai	Ez	Totalak
Gizona	3	9	12
Emakumea	8	4	12
Totalak	11	13	24

$$P[X \leq 3] = P[3,2,1,0] = \frac{\binom{11}{3}\binom{13}{9}}{\binom{24}{12}} + \frac{\binom{11}{2}\binom{13}{10}}{\binom{24}{12}} + \frac{\binom{11}{1}\binom{13}{11}}{\binom{24}{12}} + \frac{\binom{11}{0}\binom{13}{12}}{\binom{24}{12}} = 0.04976636$$

p balioa aurreko pibotekoaren berdina da, noski.

p balioa adierazgarritasun-mailaren erdia, %10, baino txikiagoa denez, hipotesi nulua, independentzia alegia, baztertu eta sexua eta erosketa loturik daudela erabaki behar da.

II. ebazkizuna: Bernoulli prozesuak *(1.25 puntu)*

Bezero bat dendara sartu eta erosketa egiteko probabilitatea 0.2 da. Bezeroak elkarrekiko independenteak dira. **Egin beharreko atazak:**
(Oharra: (a), (b) eta (c) ataletan ez da beharrezkoa azken emaitza kalkulatzea, nahikoa da probabilitatea nola kalkulatzen den adieraztea.)

(a) Zenbat da 12 bezeroetatik zerbait erosten dutenak 10 edo gehiago izateko probabilitatea?

(b) Zenbat da lehenengo erosketa gauzatu arte erosten ez dutenak 5 izateko probabilitatea? Zenbat da lehenengo erosketa gauzatu arte erosten ez dutenen kopuruaren itxaropena?

(c) Zenbat da hirugarren erosketa gauzatu arte, 8 bezero (erosleak nahiz ez erosleak) sartu behar izateko probabilitatea?

(d) Larunbatean 14 bezero sartu eta bakar batek erosi zuen. Egun horretan erosteko joera jaitsi zela erabaki al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %5.

$\boxed{\text{(a)}}$

$X : bezero\ erosleak \sim B(n = 12, p = 0.2)$

$P[X \geq 10] = P[X = 10] + P[X = 11] + P[X = 12] = 0.2^{10} \cdot 0.8^2 \cdot \dfrac{12!}{10!2!} + 0.2^{11} \cdot 0.8^1 \cdot \dfrac{12!}{11!1!} + 0.2^{12}$

R agindua (hiru aukera ematen dira):

```
>1-pbinom(9,12,0.2) #a aukera
>pbinom(9,12,0.2,lower.tail=FALSE) #b aukera
>x=seq(10,12,by=1) #c aukera
>sum(dbinom(x,12,0.2))
```

$\boxed{\text{(b)}}$

Lehen erosketa arte erosten ez dutenen kopurua (X) banaketa geometrikoaren arabera banatzen da: $G(p = 0.2)$.

$$P[X = 4] = (1 - 0.2)^5 \cdot 0.2$$

Lehen erosketa arte erosten ez dutenen kopuruaren itxaropena hau da:

$$\mu = \frac{q}{p} = \frac{0.8}{0.2} = 4$$

Batezbeste 4 bezero ez erosle itxaroten dira lehenengo eroslea izan arte.

$\boxed{\text{(c)}}$

Hirugarren erosketa arte erosten ez dutenen kopurua (X) banaketa binomial negatiboaren arabera banatzen da: $BN(r = 3, p = 0.2)$. Ohartu behar da aipaturiko 8 bezeroen artean erosleak nahiz ez erosleak daudela, eta beraz 3garren erosketa arte, 5 bezero ez erosle izan behar direla horretarako.

$$P[X = 5] = (1 - 0.2)^5 \cdot 0.2^2 \cdot \frac{7!}{5!2!} \cdot 0.2$$

$\boxed{\text{(d)}}$

Hipotesi nulutzat uste denaren aurkakoa hartzen da. Erosteko joera jaitsi dela uste denez, ohikoa (edo handiagoa) dela pentsatuko dugu: $H_0 : p \geq 0.2$.

Ebidentziak jasotzen du 14tik batek bakarrik (1/14=%7ak) erosi zuela, normalean %20ek erosten duten bitartean. Beraz, *gutxi* erosi dutelako harritzen gara. Beraz,

$$P[X \leq 1] = 0.2^1 \cdot 0.8^{13} \cdot \frac{14!}{1!13!} + 0.2^0 \cdot 0.8^{14} \cdot \frac{14!}{0!14!} = 0.1979121$$

p balioa adierazgarritasun maila baino handiagoa denez (alde bakarreko proba baita), hipotesi nulua onartu eta gertatutakoa erosteko joera jaitsi dela baieztatu ahal izateko ebidentzia nahikorik ez dela ondorioztatu behar da.

III. ebazkizuna: Poisson prozesuak *(1.25 puntu)*

Eguneko 8 orduz egiten da lana lantoki batean. Egunean gertatzen den geldialdi kopurua Poisson banaketaren araberakoa da, batezbestekoa 4.2 izanik.

Egin beharreko atazak:

(a) Zenbat da geldialdi batetik bestera 2 ordu baino gutxiago izateko probabilitatea?

(b) Zenbat da 40 egunetan 150 geldialdi baino gehiago izateko probabilitatea?

$\boxed{\text{(a)}}$

$\lambda = 4.2$ eguneko.

$\lambda = 4.2/8 = 0.525$ orduko.

$X: \ denbora\ ordutan \sim Exp(\lambda = 0.525)$

Beraz,

$$P[X < 2] = 1 - e^{-0.525\times 2} = 1 - e^{-1.05}$$

$\boxed{\text{(b)}}$

$\lambda = 4.2 \times 40 = 168$, 40 egunetan.

$$P[X > 150] = \{diskretutik\ jarraitura = P[X > 150.5] = P\left[Z > \frac{150.5 - 168}{12.96}\right] = P[Z > -1.35] = 0.911492$$

IV. ebazkizuna: LTZ *(1.25 puntu)*

Eguneko ur kontsumoa herri batean uniformeki banatzen da 10-30 Hl. tartean. Egun ezberdinetako kontsumoak independenteak dira.

Egin beharreko atazak:

(a) Zenbat da 1000 Hl.rekin 45 egunetarako nahikoa izateko probabilitatea?

(b) Eman 100 egunetako ur kontsumo minimoa %99ko probabilitatearekin.

$\boxed{\text{(a)}}$

$$X_i : eguneko\ kontsumoa \sim U(10,30) \begin{cases} \mu = \dfrac{10+30}{2} = 20 \\ \sigma^2 = \dfrac{(30-10)^2}{12} = 33.3 \end{cases}$$

1000 Hl-rekin nahikoa izango da, 95 eguneko kontsumoa 1000 Hl. baino txikiagoa denean (edo berdin).

95 eguneko kontsumoa honela banatzen da LTZ aplikatuz:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{95} \sim N(20 \times 45 = 900, \sqrt{33.3 \times 45} = 38.71)$$

Eta orain eskatutako probabilitatea kalkulatzen dugu:

$$P[\mathbf{X} < 1000] = P\left[Z < \frac{1000-900}{38.71}\right] = P[Z < 2.58] = 0.99506$$

$\boxed{\text{(b)}}$

100 eguneko kontsumoa honela banatzen da:

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \sim N(20 \times 100 = 2000, \sqrt{33.3 \times 100} = 57.73)$$

Kontsumoa minimoa kopuru batetik gorakoa da:

$$P[\mathbf{X} > x] = P\left[Z > \frac{x-2000}{57.73}\right] = 0.99 \to \frac{x-2000}{57.73} = -2.32 \to x = 1866.06Hl.$$

Gutxieneko kontsumoa 1866.06Hl. izango da 0.99ko probabilitatearekin.

ESTATISTIKA ENPRESARA APLIKATUA

Irakaslea: Josemari Sarasola

Data: 2019ko uztailaren 9a, 10:00

I. ebazkizuna: Proba binomiala *(1.25 puntu)*

Banku batean jasotako datuen arabera, mailegu bat eskatu eta azkenean ordaintzen ez dutenak %20 dira. Portzentaje hori murriztu nahian, maileguak emateko baldintza zorrotzagoak jarri dituzte. Erabaki hori abian jarri ondoren, 15 mailegu eman dira eta horietatik bakar batek ez du mailegua itzuli. Baldintza gogorragoen erabakiak mailegua ordaintzen ez dutenen portzentajea murriztu nahi duela baiezta al daiteke? Adierazgarritasun-maila: 0.05.

II. ebazkizuna: Zeinuen proba *(1.25 puntu)*

Salmentak gehitu nahi dira frankizia bateko dendetan. Horretarako, merchandising berria ezarri da. Ondoren, merchandising berriaren aurretik eta ondoren izandako salmentak jaso dira (datu binakatuak):

$$aurretik : 45-67-87-56-92-78-62-81-70-94$$

$$ondoren : 56-68-86-59-95-88-69-87-70-86$$

Zeinuen proba erabiliz, erabaki ezazu merchandising berria eraginkorra izan den, 0.10eko adierazgarritasun mailaz,

(a) balio kritikoa erabiliz,

(b) eta baita ere p balioa kalkulatuz.

III. ebazkizuna: Poisson prozesuak *(1.25 puntu)*

Auto batean matxura bat izan arteko denbora (egindako distantzia) bataz beste 20.000km da.

(a) Kalkulatu banaketa esponentzialaren formula erabiliz gurpil bat zulatu arteko distantzia gutxienez 35.000km izateko probabilitatea, distantzia-unitatetzat 10.000km hartuz.

(b) Kalkulatu Poisson banaketaren formula erabiliz 50.000kmtan zehar 4 matxura izateko probabilitatea.

(c) Nola banatzen da 5garren matxura izan arteko denbora?

(d) Kalkulatu 5garren matxura arte gehienez 80.000km egiteko probabilitatea.

IV. ebazkizuna: Banaketa uniformea eta LTZ *(1.25 puntu)*

Auto batek urtean egiten duen kilometro kopurua uniformeki banatzen da 40.000km-60.000km tartean.

(a) Kalkulatu 4 urtetan zehar, kilometro kopuru txikiena egiten den urtean gehienez 50.000km egiteko probabilitatea.

(b) Kalkulatu kilometro kopuru txikiena egiten den urtean bataz beste zenbat kilometro egiten diren.

(c) Orain, LTZra pasatzen gara; beraz, ahaztu aurreko galderak. Zenbat kilometro egiten dituzte guztira eta gehienez 10 auto 3 urtetan 0.98ko probabilitateaz? Adi egon: 10 auto 3 urtetan, beraz zenbat banaketa uniforme batu behar dituzu?

(d) Eta gutxienez probabilitate berdinarekin?

I. ebazkizuna: Proba binomiala *(1.25 puntu)*

Banku batean jasotako datuen arabera, mailegu bat eskatu eta azkenean ordaintzen ez dutenak %20 dira. Portzentaje hori murriztu nahian, maileguak emateko baldintza zorrotzagoak jarri dituzte. Erabaki hori abian jarri ondoren, 15 mailegu eman dira eta horietatik bakar batek ez du mailegua itzuli. Baldintza gogorragoen erabakiak mailegua ordaintzen ez dutenen portzentajea murriztu nahi duela baiezta al daiteke? Adierazgarritasun-maila: 0.05.

$H_0: \ p \geq 0.2$ (mailegua EZ ordaintzeko joera betikoa da, ez da murriztu).

Hipotesi nulupean,

X: 15 maileguetatik zenbat diren itzultzen EZ dutenak $\sim B(n = 15, p = 0.2)$

Hipotesi nulua baztertzen da X oso txikia denean. Beraz, probaren norabidea azpitik da.Kalkula dezagun ebidentziaren probabilitatea edo p balioa:

$$P[ebidentzia/H_0] = P[X \leq 1/p = 0.2] = 0.2^{14}0.8^4\frac{15!}{14!1!} + 0.2^{15} = 0.1671$$

p balioa adierazgarritasun-maila baino txikiagoa denez, hipotesia nulua onartu behar da. Ez dago arrazoi nahikorik, beraz, mailegua ez ordaintzeko joera murriztu dela baieztatzeko.

II. ebazkizuna: Zeinuen proba *(1.25 puntu)*

Salmentak gehitu nahi dira frankizia bateko dendetan. Horretarako, merchandising berria ezarri da. Ondoren, merchandising berriaren aurretik eta ondoren izandako salmentak jaso dira (datu binakatuak):

$$aurretik : 45 - 67 - 87 - 56 - 92 - 78 - 62 - 81 - 70 - 94$$

$$ondoren : 56 - 68 - 86 - 59 - 95 - 88 - 69 - 87 - 69 - 86$$

Zeinuen proba erabiliz, erabaki ezazu merchandising berria eraginkorra izan den, 0.10eko adierazgarritasun mailaz,

(a) balio kritikoa erabiliz,

(b) eta baita ere p balioa kalkulatuz.

Salmenten gehikuntza (ala ez) adierazten duten zeinuak ezartzen ditugu:

$$+ + - + + + + - -$$

10 dendatik, $r^+ = 7, r^- = 3$. Beraz, ezin da printzipioz ukatu merchandising berria eraginkorra izan denik. Aurrera jarraitu egiten dut.

Txikienari erreparatzen diot: $r^- = 3$.

$\boxed{\text{(a)}}$

Alde bateko proba da: merchandising berria eraginkorra da, r^+ handia denean soilik (eta r^- txikia). Beraz, tauletan begiratzeko, α bider 2 egin behar da.

Tauletako balio kritikoa 2 da, $\alpha = 0.2, n = 10$ harturik.

Ebidentziak berdindu egiten du balio kritikoa. Beraz, hipotesi nulua onartu eta merchandising berria eraginkorra dela baieztatzeko ebidentzia nahikorik ez dagoela erabaki behar da.

$\boxed{\text{(b)}}$

p balioa kalkula dezagun:

$$P[r^- \leq 3] = 0.5^3 \times 0.5^7 \times \frac{10!}{7!3!} + 0.5^2 \times 0.5^8 \times \frac{10!}{8!2!} + 0.5^1 \times 0.5^9 \times \frac{10!}{9!1!} + 0.5^{10} = 0.1718$$

p balioa $\alpha = 0.1$ baino handiagoa denez, hipotesia nulua onartu eta lehengo ondorio berera iristen naiz.

III. ebazkizuna: Poisson prozesuak *(1.25 puntu)*

Auto batean matxura bat izan arteko denbora (egindako distantzia) bataz beste 20.000km da.

(a) Kalkulatu banaketa esponentzialaren formula erabiliz gurpil bat zulatu arteko distantzia gutxienez 35.000km izateko probabilitatea, distantzia-unitatetzat 10.000km hartuz.

(b) Kalkulatu Poisson banaketaren formula erabiliz 50.000kmtan zehar 4 matxura izateko probabilitatea.

(c) Nola banatzen da 5garren matxura izan arteko denbora?

(d) Kalkulatu 5garren matxura arte gehienez 80.000km egiteko probabilitatea.

$\boxed{\text{(a)}}$

$\frac{1}{\lambda} = 20000 \rightarrow \lambda_{1km} = \frac{1}{20000} \rightarrow \lambda_{10000km} = \frac{10000}{20000} = 0.5$

35000km zenbat da? 3.5 aldiz 10000km.

$$P[D > 35000] = 1 - (1 - e^{-0.5\times 3.5}) = 0.17$$

$\boxed{\text{(b)}}$

$\lambda_{50000km} = 2.5$

$P[X = 4] = \frac{e^{-2.5} 2.5^4}{4!}$

$\boxed{\text{(c)}}$

Distantzia-unitatetzat 10.000km harturik, hurrengo 5garren matxurara arteko denbora Gamma banaketaren araberakoa da:

$$D_5 \sim \Gamma(k = 5, \lambda = 0.5)$$

$\boxed{\text{(d)}}$

5garren matxurara arte gehienez 80.000km izango dira, 80.000 kmtan 5 matxura edo gehiago daudenean:

$\lambda_{80000km} = 4$

$P[D < 80000] = P[X \geq 5] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - \left(\frac{e^4 4^0}{0!} + \frac{e^4 4^1}{1!} + \frac{e^4 4^2}{2!} + \frac{e^4 4^3}{3!} + \frac{e^4 4^4}{4!} \right)$

IV. ebazkizuna: Banaketa uniformea eta LTZ *(1.25 puntu)*

Auto batek urtean egiten duen kilometro kopurua uniformeki banatzen da 40.000km-60.000km tartean.

(a) Kalkulatu 4 urtetan zehar, kilometro kopuru txikiena egiten den urtean gehienez 50.000km egiteko probabilitatea.

(b) Kalkulatu kilometro kopuru txikiena egiten den urtean bataz beste zenbat kilometro egiten diren, betiere 4 urtetan zehar.

(c) Orain, LTZra pasatzen gara; beraz, ahaztu aurreko galderak. Zenbat kilometro egiten dituzte guztira eta gehienez 10 auto 3 urtetan 0.98ko probabilitateaz? Adi egon: 10 auto 3 urtetan, beraz zenbat banaketa uniforme batu behar dituzu?

(d) Eta gutxienez probabilitate berdinarekin?

(a)

$$P[m < 50000] = 1 - \left(\frac{60000 - 50000}{60000 - 400000}\right)^4$$

(b)

$$E[m] = 40000 + \frac{60000 - 40000}{4+1} = 44000km$$

(c)

LTZ aplikatzeko eman ditzagun auto bati dagokion urtebeteko batezbestekoa eta bariantza:

$$\mu = \frac{40000 + 60000}{2} = 50000 \ ; \ \sigma^2 = \frac{(60000 - 40000)^2}{12}$$

10 autok 3 urtetan egiten duten D distantzia emateko, aurrekoak 30 aldiz batu behar ditugu:

$$D \sim N\left(50000 \times 30 = 1500000, \sigma = \sqrt{30 \times \frac{(60000 - 40000)^2}{12}} = 31622\right)$$

$$P[D < d] = 0.98 \rightarrow P\left[Z < \frac{d - 1500000}{31622}\right] = 0.98$$

$$\frac{d - 1500000}{31622} = 2.05 \rightarrow d = 1564825km$$

(d)

$$P[D > d] = 0.98 \rightarrow P\left[Z > \frac{d - 1500000}{31622}\right] = 0.98$$

$$\frac{d - 1500000}{31622} = -2.05 \rightarrow d = 1435174km$$