Boto haztatuko sistemak

Josemari Sarasola

Gizapedia

Zer da boto haztatua?

Bozketa batzuetan parte hartzaileen botoek ez dute balio berdina; adibidez, parlamentu bateko alderdiek boto kopuru ezberdinak dituzte, eta elkarte anonimo batean bazkideek akzio kopuru desberdinak dituzte, eta beraz botoak ere bai. Halakoetan, *boto haztatuko sistema* baten aurrean gaudela esaten da.

Botu haztatuko sistemak

Problematika

Boto haztatuko sistemek ezaugarri bereziak dituzte: gehiengora heltze aldera, alderdi guztiek ez dute botere berdina, boto kopuru desberdinak dituztenez; bestalde, boto kopuru ezberdinak dituzten alderdiek botere berdina izan ditzakete (boto bakarreko alderdia 10 botoko alderdia bezain erabakiorra izan daitekeenez).

Azterketa

Boto haztatuko sistemen azterketa joko-teoria delakoaren baitan aztertu da. Joko-teoria egoera gatazkatsuak aztertzen dituen teoria matematikoa da, hainbat arlotan erabiltzen da, hala nola mikroekonomian. Boto haztatuko sistemetan azterketan, joko-teoriaren helburua jokalarien boterea neurtzea da, gehiengoak osatze aldera. Jokalariak boto emaileak dira, izan alderdiak izan bazkideak.

Botu haztatuko sistemak

Bozketa baten definizioa

- Bozketa haztatu bat definitzeko, gehiengora heltzeko behar den boto kopurua (q *kuota* deituko duguna, eta gehienetan botoen erdiak baino handiagoa dena) eta w_i jokalarien boto kopuruak behar dira.
- Adibidez, X, Y, Z eta T alderdiek 4, 3, 2 eta 1 boto izan eta gehiengorako 6 boto behar direlarik:

$$u : \{q; w_i\} : \{6; X{:}4, Y{:}3, Z{:}2, T{:}1\}$$

- Komeni da kuota botoen erdiak gehi bat izatea; izan ere, kuota botoen erdia balitz, erabaki bat eta bere aurkakoa etengabe hartzen jarduteko arriskua dago.
- Batzuetan kuota handiagoa eskatzen da (bi heren) eta besteetan guztien adostasuna ere behar izaten da.

Botu haztatuko sistemak

Koalizio irabazleak eta minimalak

- *Koalizioa* jokalarien multzo bat da.
- *Koalizio irabazleak* gehiengora heltzen diren koalizioak dira. Aurreko adibidean,

$$W(\nu) = \Big\{\{X,Y\},\{X,Z\},$$
$$\{X,Y,Z\},\{X,Z,T\},\{X,Y,T\},\{Y,Z,T\},$$
$$\{X,Y,Z,T\}\Big\}$$

- *Koalizio minimalak* bere baitan koalizio irabazlerik ez duten koalizio irabazleak dira:

$$M(\nu) = \Big\{\{X,Y\},\{X,Z\},\{Y,Z,T\}\Big\}$$

- Beraz, koalizio minimal batean edonork uzten badu, akabo, erabakia ezin da hartu.

Koalizioak zerrendatuz

- Batzuetan koalizio irabazleak (eta horien artean minimalak) zerrendatzea ez da erraza, banan-banan aipatu behar direnez, zalantza sor daitekeelako benetan zerrenda osoa osatu den.
- Zalantzak saihesteko, koalizio posible guztiak $2^n - 1$ direla har daiteke kontuan, eta irabazleak emateko haietatik galtzaile direnak ezabatu.
- Hala,
    - $n = 3$ jokalarirentzat, $2^3 - 1 = 7$ koalizio posible daude;
    - $n = 4$ jokalarirentzat, $2^4 - 1 = 15$;
    - $n = 5$ jokalarirentzat, $2^5 - 1 = 31$.
- Aholku bat: izan sistematikoa!

Jokalari motak: diktadoreak eta beto-ahalmena duen jokalariak

- i jokalaria *diktadorea* dela esaten da, $w_i \geq q$ betetzen denean, hots, bere boto kopurua kuota baino handiagoa denean. Diktadoreak erabakiak inposatzeko ahalmena du.
- i jokalariak *beto-ahalmena* duela esaten da, $V - w_i < q$ betetzen denean, V izanik jokalari guztien boto kopurua. Betoa duen jokalariak erabaki guztiak atzera botatzeko ahalmena du.
- Diktadore guztiek beto-ahalmena dute, baina badira betoa duten jokalariak diktadore ez direnak.

Botu haztatuko sistemak

Jokalari motak: diktadoreak eta beto-ahalmena duen jokalariak

- $u : \{5; X{:}6, Y{:}3, Z{:}1\}$ jokoan, X diktadorea da.
- $u : \{7; X{:}6, Y{:}3, Z{:}1\}$ jokoan, X ez da diktadorea, baina beto-ahalmena du.

Jokalari motak: jokalari nuluak

- Jokalari bat *nulua* dela esaten da, kuotara heltzeko inoiz beharrezkoa ez denean, hau da, bera dagoen koalizio irabazle guztietarako, bera kenduta ere koalizioa irabazlea denean.
- Adibidea: $u : \{4; X{:}1, Y{:}2, Z{:}2, T{:}2\}$ jokoan, X nulua da.
- Diktadore bat dagoenean, beste jokalari guztiak nuluak dira.

Jokalari motak: jokalari kritikoak

- Jokalari bat *koalizio jakin baterako kritikoa* dela esaten da, bera gehituta galtzaile den koalizioa irabazle bihurtzen denean.
- Adibidea, $u : \{11; X{:}7, Y{:}5, Z{:}4\}$ jokoan, Y kritikoa da XY koalizioan, baina ez XYZ koalizioan.
- Koalizio *minimal* batean, jokalari guztiak dira kritikoak.
- Jokalari kritikoaren kontzeptua funtsezkoa da jokalarien boterea neurtzeko.

Koalizio ia-minimal edo hauskorrak

- Koalizio *ia-minimal* edo *hauskorra* gutxienez jokalari kritiko bat duen koalizio irabazlea da.
- Koalizio minimalek koalizio ia-minimalen multzoaren azpimultzo bat osatzen dute.
- Adibidez, $u : \{6; X : 4, Y{:}3, Z{:}2, T{:}1\}$ jokoan, hau da koalizio hauskorren multzoa: $G(\nu) = \Big\{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{X, Y, Z\}, \{X, Z, T\}, \{X, Y, T\}, \{Y, Z, T\}\Big\}$
- Koalizio hauskorrak zerrendatzeko, koalizio irabazleak aztertzen dira banan-banan, minimalak kenduta, azken hauek hauskorrak direla badakigulako jada).
- Koalizio irabazleak, minimalak eta hauskorrak ordena horretan zerrendatu behar dira.

Botu haztatuko sistemak

Koalizioen murrizketa: jokalari antagonistak

- Jokalari antagonistak koalizio batean elkarrekin inondik ere izango ez diren jokalariak dira.
- Bereziki politikan gertatzen dira; adibidez, Catalunyan CUP eta Ciudadanos.
- Jokalari antagonistak daudenean, haiek batera dauden koalizio irabazleak, minimalak eta ia-minimalak baztertu behar dira zerrendatik.

Ariketa 1

$u : \{12; X{:}9, Y{:}5, Z{:}4, T{:}2\}$

1. Koalizio irabazle eta minimalen multzoak adierazi.
2. Diktadorerik, betoa duenik eta jokalari nulurik badagoen aztertu.
3. Koalizio hauskorren multzoa adierazi eta adierazi horietako bakoitzean zein diren jokalari kritikoak.

Ariketa 2

$u : \{q; X{:}8, Y{:}4, Z{:}2\}$. Kalkulatu q,

1. jokalari guztiek betoa izan dezaten;
2. Y betoduna izan dadin, baina Z ez;
3. Z jokalari nulu bakarra izan dadin.

Boterea neurtzen

- Helburua: jokalari bakoitzak duen boterea neurtzea.
- Kontuan hartu behar da boterea ez datorrela bat boto kopuruarekin.
- Adibidez, $u : \{4; X{:}3, Y{:}2, Z{:}1\}$ jokoan, Y eta Z jokalariek botere berdina lukete, X jokalariak Y edo Z behar duelako kuotara heltzeko, eta ez da garrantzizkoa Yk bi boto eta Zk boto bakarra izatea.

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

- Jokalari guztien koalizioa jokalariak banan-banan helduz sortzeko modu guztiak, hots koalizio sekuentzial guztiak, ematen dira.
- Koalizio sekuentzial bakoitzean, kuotara heltzea dakarren jokalaria zehazten da.
- Koalizio sekuentzial guztietarako, jokalari bakoitzak kuotara heltzea ekarri duen aldi kopurua neurtzen da, portzentajean. Emaitza Shapley-Shubik botere-indizea da, eta joakalri bakoitzaren boterea neurtzen du.

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

- Adibidez, $u : \{4; X{:}3, Y{:}2, Z{:}1\}$.
- Koalizio sekuentzialak:

Koalizio sekuentziala	Nori esker heltzen den kuotara
XYZ (3-5-6)	Y
XZY (3-4-6)	Z
YXZ (2-5-6)	X
YZX (2-3-6)	X
ZXY (1-4-6)	X
ZYX (1-3-6)	X

- Beraz,
  - $\phi(X) = \dfrac{4}{6} = 0.6666 = 66.66\%$
  - $\phi(Y) = \dfrac{1}{6} = 0.1666 = 16.66\%$
  - $\phi(Z) = \dfrac{1}{6} = 0.1666 = 16.66\%$

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

- Ikusten denez, X-k dagokion boto kopurua baino botere handiagoa du, eta Y eta Z jokalariek botere berdina dute, boto kopuru ezberdinak izan arren (hain zuzen, jokalari *simetrikoak* dira).
- Sh botere indizeen batura 1 da, jokalari guztietarako.

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

- Boto emaileak gutxi direnean, erraza da Shapley-Shubik indizeen kalkulua, baina kopuru batetik gora *lehertu* egiten da koalizio sekuentzialen kopurua.
- n jokalarien koalizio sekuentzial bakoitza n elementuen permutazio bat. n elementuen permutazio kopurua $n!$ da.
- Adibidez, 6 jokalarirentzat, 6!=720 koalizio sekuentzial aztertu beharko genituzke.

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

Aukeran, Shapley-Shubik balioaren beste prozedura bat dago, laburragoa izaten dena.

1. Jokalari bakoitzeko, bera kritikoa den koalizio ia-minimalak, *swing* edo biraketa (koalizio irabazle izatetik galtzaile izatera, alegia) ere deitzen direnak, zerrendatzen dira.
2. *Swing* horietako bakoitzeko, hau kalkulatzen da: $q(s) = \dfrac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, s izanik koalizio horien tamaina, eta n jokalarien kopurua.
3. Jokalari bakoitza kritikoa den koalizio ia-minimal guztietarako $q(s)$ balioen batura kalkulatzen da. Batura horren emaitza da Shapley-Shubik balioa.

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

Adibidez, $u : \{4; X{:}3, Y{:}2, Z{:}1\}$.

1. Koalizio ia-minimalak, haietan kritikoak diren jokalarien arabera bereizita:
   - $SW(X) = \Big\{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{X, Y, Z\}\Big\}$
   - $SW(Y) = \Big\{\{X, Y\}\Big\}$
   - $SW(Z) = \Big\{\{X, Z\}\Big\}$
2. $q(s)$ balioak kalkulatzen dira:
   - $q(2) = \dfrac{(2-1)!(3-2)!}{3!} = \dfrac{1}{6}$
   - $q(3) = \dfrac{(3-1)!(3-3)!}{3!} = \dfrac{2}{6}$

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

3. Shapley-Shubik balioak kalkulatzen dira, $q(s)$ balioen batura kalkulatuz jokalari bakoitzeko *swing* koalizioetarako:
   - $\phi(X) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = 0.6666$
   - $\phi(Y) = \frac{1}{6} = 0.1666$
   - $\phi(Z) = \frac{1}{6} = 0.1666$

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

Zein da $q(s)$ balioen esanahia?

Koalizio sekuentzial bakoitzak koalizio ia-minimal ordenatu bat dakar, swing boto jakin bati buruzkoa.

Koalizio sekuentziala	Swing botoa	Koalizio ia-minimal ordenatua
XYZ	Y	XY
XZY	Z	XZ
YXZ	X	YX
YZX	X	YZX
ZXY	X	ZX
ZYX	X	ZYX

Boterea neurtzen: Shapley-Shubik balioa

Zein da $q(s)$ balioen esanahia?

- X jokalariaren swing den XYZ koalizioa 2 kasutan, 6tik, gertatzen dela ikusten dugu: YZX eta ZYX. Beraz, X jokalariak swing egiten dueneko XYZ koalizio ia-minimalaren probabilitatea 2/6 litzateke. Horixe da $q(3)$.
- X jokalariaren XY swing koalizioa kasu batean, 6tik, gertatzen dela ikusten dugu: YX. Beraz, X jokalariak swing egiten dueneko XY koalizio ia-minimalaren probabilitatea 1/6 litzateke. Horixe da $q(2)$.
- Arrazonamendua berdina da Y eta Z jokalarien swing koalizioetarako.
- Zehazkiago eta orokorrean, $q(s)$ n jokalarietatik jokalari jakin bat s posizioan kokatzeko probabilitatea da, $s-1$ jokalari jakinen ondoren, koalizio sekuentzial guztiak probabilitate berekoak izanda.

Ariketa 3

$u : \{6; X{:}4, Y{:}3, Z{:}2, T{:}1\}$. Kalkulatu Shapley-Shubik balioa ikasitako bi prozedurak baliatuz.

Boterea neurtzen: Banzhaf indizea

1. Koalizio ia-minimaletatik abiatzen da (Shapley-Shubik balioa bezala).
2. Koalizio ia-minimaletan, jokalari bakoitza kritikoa den aldi-kopurua (*swing* direlakoak alegia) zenbatzen da.
3. Jokalari bakoitzeko *swing* horien portzentajea kalkulatzen da, kopuru totalari buruz. Emaitza Banzhaf botere-indizea da.

Boterea neurtzen: Banzhaf indizea

Adibidez, $u : \{4; X{:}3, Y{:}2, Z{:}1\}$.

1. Koalizio ia-minimalak: $G(\nu) = \Big\{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{X, Y, Z\}\Big\}$
2. Markatu *swing* edo biraketak:

$$G(\nu) = \Big\{\{\color{red}{X}, \color{green}{Y}\}, \{\color{red}{X}, \color{blue}{Z}\}, \{\color{red}{X}, Y, Z\}\Big\}$$

3. Lau biraketa daude, kolorez markatu direnak. Jokalari bakoitzeko zenbatuz, Banzhaf indizeak eskuratzen ditugu:
   - $\beta(X) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$
   - $\beta(Y) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$
   - $\beta(Z) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

Boterea neurtzen: Banzhaf indizea

- **Parekotasunak**: jokalari bakoitzeko biraketak zenbatzen dira bi indizeetan.
- **Aldeak**:
    - Banzhaf indizean koalizio ia-minimal guztiek, swing dakarren jokalaria zehaztuta, osatuak izateko probabilitate berdina dutela suposatzen da. Shapley-Shubik indizean berriz, koalizio ia-minimal horiek probabilitate desberdinak dituzte osatuak izateko, $q(s)$ balioen araberakoak.
    - Beste era batera esanda, Banzhaf indizean suposatzen da jokalari guztiek edozein koaliziora sartzeko probabilitate berdina dutela. Berriz, Shapley-Shubik indizean jokalari guztiek tamaina jakin bateko koaliziora sartzeko probabilitateak zein tamaina horretako koalizioak osatzeko probabilitateak beraien artean berdinak direla suposatzen da.

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Deegan-Packel indizea

Aurrekariak:

- Koalizio minimalak soilik aterako dira garaile.
- Koalizio minimal guztiek probabilitate berdina dute osatuak izateko.
- Koalizio minimal batean jokalari guztiak kritikoak direnez, beraien artean neurri berean banatuko boterea edo garaipena.

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Deegan-Packel indizea

Adibidez, $u : \{5; X{:}3, Y{:}2, Z{:}2, T{:}1\}$.

1. Koalizio minimalak 3 dira:
   $M(\nu) = \Big\{\{X, Y\}, \{X, Z\}, \{Y, Z, T\}\Big\}$
   - X jokalaria barnean dutenak: $\{X, Y\}, \{X, Z\}$
   - Y jokalaria barnean dutenak:$\{X, Y\}, \{Y, Z, T\}$
   - Z jokalaria barnean dutenak:$\{X, Z\}, \{Y, Z, T\}$
   - T jokalaria barnean dutenak:$\{Y, Z, T\}$

Boterea neurtzen: Deegan-Packel indizea

2. Deegan-Packel indizeak:
   - $\rho(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.3333$
   - $\rho(Y) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 0.2777$
   - $\rho(Z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 0.2777$
   - $\rho(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 0.1111$

- Azalpena: aurretik bider 1/3 egiten da 3 koalizio minimal daudelako probabilitate berdinarekin, eta parentesi arteko balioak jokalari bakoitzaren koalizio minimaletan irabazia (1 edo gehiengoa edo erabaki aurrera ateratzea) berdin partitzen delako.

Botu haztatuko sistemak

Boterea neurtzen: Johnston indizea

Deegan-Packel indizearen oinarri edo aurrekari berdinak ditu, baina diferentzia hauekin:

- koalizio minimalen ordez, ia-minimalak hartzen ditu;
- koalizio ia-minimal batean, irabaziak kritikoak diren jokalarien artean soilik banatzen dira.

Boterea neurtzen: Johnston indizea

Adibidez, $u : \{5; X{:}3, Y{:}2, Z{:}2, T{:}1\}$.

1. Taula batean koalizio ia-minimalak, haietako jokalari kritikoak eta horien kopurua zerrendatzen dira:

Koalizio ia-minimalak	Kritikoak	Kritikoen kopurua
XY	XY	2
XZ	XZ	2
YZT	YZT	3
XYZ	X	1
XYT	XY	2
XZT	XZ	2

Boterea neurtzen: Johnston indizea

2. Jokalari bakoitza kritikoa den koalizio ia-minimalak zerrendatzen dira:

Jokalaria	Kritikoa den koalizio ia-minimalak
X	XY, XZ, XYZ, XYT, XZT
Y	XY, YZT, XYT
Z	XZ, YZT, XZT
T	YZT

Boterea neurtzen: Johnston indizea

3. Azkenik, Johnston indizeak kalkulatzen ditugu, probabilitate bereko 6 koalizio ia-minimal daudela, eta jokalari bakoitza kritikoa den koalizio ia-minimaleko jokalari kritikoen kopurua kontuan hartuz, irabaziak banatzeko:
    - $\gamma(X) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = 0.5$
    - $\gamma(Y) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right) = 0.222$
    - $\gamma(Z) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right) = 0.222$
    - $\gamma(T) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{3} = 0.055$

- Ohartzekoa da Deegan-Packel eta Johnston indizeen arabera, Y eta Z jokalariek botere berdina dutela, boto kopuru berdinak dituztenez. Hala ere, batzuetan boto kopuru ezberdinekin ere botere berdina izan dezakete; orduan, botere bereko jokalariak *simetrikoak* direla esaten da.

Johnston indizea: kalkulua era trinkoan

Koalizio ia-minimalak	X		Y		Z		T	
XY	$\bullet$	$\frac{1}{2}$	$\bullet$	$\frac{1}{2}$				
XZ	$\bullet$	$\frac{1}{2}$			$\bullet$	$\frac{1}{2}$		
YZT			$\bullet$	$\frac{1}{3}$	$\bullet$	$\frac{1}{3}$	$\bullet$	$\frac{1}{3}$
XYZ	$\bullet$	$\frac{1}{1}$						
XYT	$\bullet$	$\frac{1}{2}$	$\bullet$	$\frac{1}{2}$				
XZT	$\bullet$	$\frac{1}{2}$			$\bullet$	$\frac{1}{2}$		
Guztira		3		1.33		1.33		0.33
Johnston		$\frac{3}{6}$		$\frac{1.33}{6}$		$\frac{1.33}{6}$		$\frac{0.33}{6}$

Boterea neurtzen: Holler indizea

Holler indizeak, Holler-Packel eta ondasun publikoaren indizea ere deituak, koalizio minimal guztietan jokalari bakoitza azaltzen den aldi kopurua zenbatzen du portzentajean.

Boterea neurtzen: Holler indizea

- Adibidez, $u : \{5; X{:}3, Y{:}2, Z{:}2, T{:}1\}$.
- Koalizio minimalak 3 dira:
  $M(\nu) = \Big\{\{X,Y\},\{X,Z\},\{Y,Z,T\}\Big\}$
- Koalizio minimal horietan jokalari bakoitza azaltzen den aldi kopuruak hauek dira:

$$M(X) = 2,\ M(Y) = 2,\ M(Z) = 2,\ M(T) = 1$$

- Portzentajean emanda, jakinda koalizio minimal horietako jokalariak guztira 7 direla, Holler indizeak eskuratzen ditugu:

$$\gamma(X) = \frac{2}{7},\ \gamma(Y) = \frac{2}{7},\ \gamma(Z) = \frac{2}{7},\ \gamma(T) = \frac{1}{7}$$