Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

Ariketa ebatziak: Probabilitate desberdintzak

Egilea: Josemari Sarasola

1. ariketa

$P[X \geq 6] = \frac{1}{6} = 0.166$ [probabilitate guztiz zehatza, dadoaren informazio osoarekin kalkulatua]

Dadoren itxaropena eta barientza

x	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	6/6	36/6
	1	3.5	$\alpha_2 = 15.16$

$\mu = 3.5$

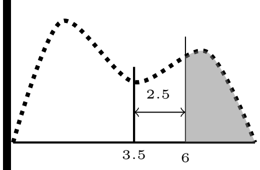
$\sigma^2 = 15.166 - 3.5^2 = 2.92$

Txebixev arrunta

mutur bat $\leq$ bi muturrak

$P[X \geq 6] \leq P[|X - 3.5| \geq 2.5] \leq \frac{2.92}{2.5^2} = 0.46$

Eskatutako prob. 0.46 baino txikiagoa da.

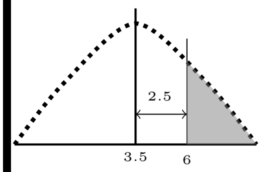


Txebixev+sim

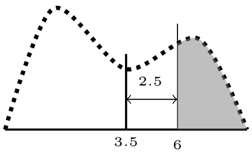
mutur bat=bi muturrak/2

$P[X \geq 6] = P[|X - 3.5| \geq 2.5]/2 \leq 0.23$

Eskatutako prob. 0.23 baino txikiagoa da.



Txebixev-Cantelli



$P[X \geq 6] = P[X \geq 3.5 + 2.5] \leq \frac{2.92}{2.92+2.5^2} = 0.31$

Eskatutako prob. 0.31 baino txikiagoa da.

Markov

$P[X \geq 6] \leq \frac{3.5}{6} = 0.58$

Eskatutako prob. 0.58 baino txikiagoa da.

Emaitzak alderatu

Hurbilketa finena Txebixev+sim da, informazio gehiena baliatzen duena delako (μ, σ eta simetria). Markov da kaxkarrena, informazio gutxiena baliatzen duena delako.

2. ariketa

μ besterik ez da ezagutzen.

Beraz, Markov baliatzen dugu.

$P[X \geq 250] \leq \frac{100}{250} = 0.4$

Eskatutako prob. 0.4 baino txikiagoa da.

$P[X \leq 150]$?

Markov-en formatoan jartze aldera,

aurkakoa kalkulatzen dugu.

$P[X \geq 150] \leq \frac{100}{150} = 0.66 \rightarrow P[X \leq 150] \geq 0.33$

3. ariketa

Gogora dezagun arestiko ariketako emaitza:

Txebixev arrunta baliatuz, 132 opil behar dira.

Honela ateratzen genuen:

beherako probabilitatea (nahikoa izatekoa) 0.9 da.

Beraz,

goiko muturreko probabilitatea $\frac{10^2}{\epsilon^2} = 0.1$

eta ϵ bakandu.

Txebixev+sim

Goiko muturreko probabilitatea

zati 2 eginda geratzen da:

$\frac{10^2}{2\epsilon^2} = 0.1 \rightarrow \epsilon = 22.36$

Beraz, 122.36 $\rightarrow$ 123 opil.

Opil gutxiago behar dira orain,

informazio handiagoa edukita (simetria alegia),

gehiago afinatzen dugulako.

Txebixev-Cantelli

Betiere hartuz

goiko muturreko probabilitatea:

$\frac{10^2}{10^2+a^2} = 0.1 \rightarrow a = 30$

Beraz, 130 opil behar dira Txebixev-Cantelliren arabera.

Markov

Betiere hartuz

goiko muturreko probabilitatea:

$\frac{\mu}{a} = \frac{100}{a} = 0.1 \rightarrow a = 1000$

Beraz, 1000 opil behar dira.

(Begiratu ongi desberdintzaren

formula eta grafikoa:

hemen ez zaio a-ri 100 gehitu behar,

a horrek ez baitu 100etik azken baliora

dagoen tartea adierazten, azken balioa baizik.

Ez da batere hurbilketa fina besteen aldean,

μ informazio soila darabilgu eta.

4. ariketa

Besterik gabe, Txebixev-en desberdintzan $\epsilon = \lambda\sigma$ eginez:

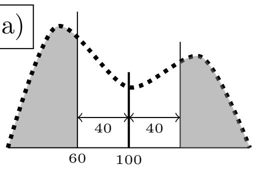
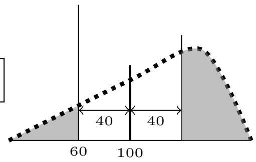
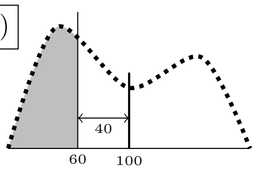
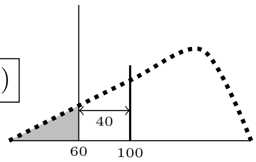
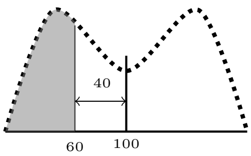
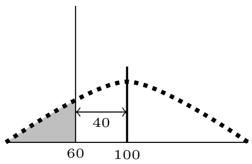
$P\left(|X-\mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \xrightarrow[\epsilon=\lambda\sigma]{} P(|X-\mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

Har dezagun orain Vysochanski-Petunin desberdintza:

$$P(|X-\mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{4}{9\lambda^2}$$

Ikusten denez, Vysochanski-Petuninek hurbilketa finagoa edo zehatzagoa ematen dute, Txebixev-en muga bider 4/9 egitea lortzen dutelako, hots %55 txikiagoa egitea, banaketa moda bakarrekoa dela jakitearekin soilik.

5. ariketa

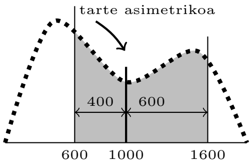
$\mu = 100, \sigma = 20$	$\mu = 100, \sigma = 20$, moda bakarra
$\boxed{\text{(a)}}$  → Txebixev arrunta	$\boxed{\text{(a)}}$  → Vysochanski
$\boxed{\text{(b)(i)}}$  → (1) Txebixev arrunta (mutur bat ≤ bi mutur) → (2) Cantelli	$\boxed{\text{(b)(i)}}$  → Vysochanski (mutur bat ≤ bi mutur)
$\boxed{\text{(b)(ii:+sim)}}$  → Txebixev +sim	$\boxed{\text{(b)(ii:+sim)}}$  → Vysochanski+sim

$\mu = 100, \sigma = 20$	$\mu = 100, \sigma = 20$, moda bakarra
$\boxed{\text{(a)}}$ Txev arrunta: $$P[\lvert X-100\rvert \geq 40] \leq \frac{20^2}{40^2} = 0.25$$	$\boxed{\text{(a)}}$ Vysochanski: $$40 = 20\lambda \to \lambda = 2$$ $$P[\lvert X-100\rvert \geq 40] \leq \frac{4}{9 \times 2^2} = 0.11$$
$\boxed{\text{(b)(i)}}$ Txev arrunta (mutur bat ≤ bi mutur): $$P[X \leq 60] \leq 0.25$$ Cantelli: $$P[X \leq 60] = P[X \leq 100-40] \leq \frac{20^2}{20^2+40^2} = 0.2$$	$\boxed{\text{(b)(i)}}$ Vysochanski (mutur bat ≤ bi mutur): $$P[X \leq 60] \leq 0.11$$
$\boxed{\text{(b)(ii)}}$ Txev +sim: $P[X \leq 60] \leq 0.125$ (goikoa zati 2)	$\boxed{\text{(b)(ii)}}$ Vysochanski +sim: $P[X \leq 60] \leq 0.055$ (goikoa zati 2)

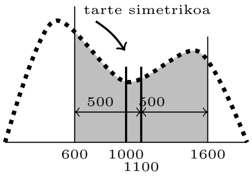
Ohartu behar da (b)(i) atalean, Cantellik hurbilketa finagoa ematen duela Txebixev arruntak baino espreski mutur bakarreko probabilitateak hurbiltzeko asmatua delako. Bestalde, ikusten denez, simetriaren eta moda bakarraren informazioa sartu ahala hurbilketa orduan eta finagoak direla.

6. ariketa

Txebixev asimetrikoa



$a = \frac{600+1600}{2} = 1100$
$b = 1600 - 1100 = 1100 - 600 = 500$



Formula garatuz:

$$P\left(|X - 1100| \geq 400\right) \leq \frac{200^2 + (1000-1100)^2}{500^2} = 0.2$$

Kanpoko probabilitatea 0.2 baino txikiagoa da (edo berdin).
Beraz, barrukoa 0.8 baino handiagoa izango da:

$$P\left(|X - 1100| \leq 400\right) > 0.8$$