# Estatistika enpresara aplikatua

# EAZ Gradua: 2. ikasturtea (1. lauhilekoa)

# Irakaslea: Lorea Mendiola

# Estimatzaileen propietateak
# Ariketa ebatziak

Egilea: Beñat Zunzunegi

Eskuragarri hemen:
https://gizapedia.hirusta.io/ikasliburua-estimatzaileen-propietateak-ariketak-eta-ebazpenak/

Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

ESTIMATZALEEN PROPIETATEAK

**2. ariketa**

$N(\mu, 1)$ populazio normal batetik 2 tamainako zorizko lagin bat lortu da, $(x_1, x_2)$. Batezbestekoaren hurrengo estimatzaileak hartu ditugu kontuan:

$$T_1 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \;\; ; \;\; T_2 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2$$

a) Estimatzaileak alboragabeak al dira? Zergatik?
b) Zeinek dauka bariantza txikiagoa? Zein da onena?

---

(a)

Lehen estimatzailearen alboragabetasuna azter dezagun:

$$E[T_1] = E\left[\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right] = \frac{2}{3}E[x_1] + \frac{1}{3}E[x_2] = \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu$$

Estimatzailearen batezbestekoa bat dator estimatu nahi den $\mu$ parametroaren balioarekin. Beraz, estimatzailea alboragabea da.

Goazen bigarren estimatzailearekin:

$$E[T_2] = E\left[\frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2\right] = \frac{2}{5}E[x_1] + \frac{4}{5}E[x_2] = \frac{2}{5}\mu + \frac{4}{5}\mu = \frac{6}{5}\mu > \mu$$

Estimatzailearen batezbestekoa ez dator bat estimatu nahi den $\mu$ parametroaren balioarekin. Beraz, estimatzailea alboratua da. Gainera, estimatzailearen batezbestekoa $\mu$ baino handiagoa denez, esan daiteke batezbeste gehiegiz estimatzen duela parametroaren balioa.

---

(b)

Lehen estimatzailearen bariantza azter dezagun:

$$var[T_1] = var\left[\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right] = \frac{4}{9}var[x_1] + \frac{1}{9}var[x_2] = \frac{4}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times 1 = \frac{5}{9} = 0.55$$

Goazen bigarren estimatzailearekin:

$$var[T_1] = var\left[\frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2\right] = \frac{4}{25}var[x_1] + \frac{16}{25}var[x_2] = \frac{4}{25} \times 1 + \frac{16}{25} \times 1 = \frac{20}{25} = 0.8$$

Bigarren estimatzailearen bariantza handiagoa du.

$T_1$ alboragabea da (bigarrena ez), eta bariantza txikiagoa du. Beraz, hobea da.

**3. ariketa**

$(x_1, x_2)$ bi aldagai aleatorio independente dira, $E[x_i] = \mu$ eta $var[x_1] = \sigma^2$ izanik, $i = 1, 2$ izanik. Batezbestekoaren ($\mu$) bi estimatzaileak dauzkagu:

$$T_1 = \frac{x_1 + x_2}{3} \quad ; \quad T_2 = \frac{2x_1 + x_2}{4}$$

a) Estimatzaileak alboragabeak al dira? Zergatik?
b) Zein da estimatzaile onena? Zergatik?

---

Lehen estimatzailearen alboragabetasuna azter dezagun:

$$E[T_1] = E\left[\frac{x_1 + x_2}{3}\right] = \frac{1}{3}(E[x_1] + E[x_2]) = \frac{1}{3}(\mu + \mu) = \frac{2}{3}\mu \neq \mu$$

Estimatzailearen batezbestekoa ez dator bat estimatu nahi den $\mu$ parametroaren balioarekin. Beraz, estimatzailea alboratua da.

Goazen bigarren estimatzailearekin:

$$E[T_2] = E\left[\frac{2x_1 + x_2}{4}\right] = \frac{1}{4}(2E[x_1] + E[x_2]) = \frac{1}{4}(2\mu + \mu) = \frac{3}{4}\mu \neq \mu$$

Estimatzailearen batezbestekoa ez dator bat estimatu nahi den $\mu$ parametroaren balioarekin. Beraz, estimatzailea alboratua da.

$T_1$ estimatzailearen alborapena ($|E[T] - \mu|$) handiagoa da, hau da, bere batezbestekoa gehiago aldentzen da $\mu$-tik. Beraz, $T_1$ alboratuagoa da.

---

b) Estimatzaile onena zein den jakiteko, bariantza ere kalkulatu behar da:

$$var[T_1] = var\left[\frac{x_1 + x_2}{3}\right] = \frac{1}{9}(\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{2}{9}\sigma^2$$

$$var[T_2] = var\left[\frac{2x_1 + x_2}{4}\right] = \frac{1}{16}(4\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{5}{16}\sigma^2$$

$T_1$ estimatzaileak bariantza handiagoa du. Beraz, zehatzagoa da, eta beraz hobea bariantzaren aldetik.

Laburki, $T_1$ alboratuagoa da, baina zehatzagoa. Dilema ebazteko, doitasuna neurtzen dugu batezbesteko errore kuadratikoaren bitartez:

$$BEK(T_1) = (E[T_1] - \mu)^2 + var[T_1] = (\frac{2\mu}{3} - \mu)^2 + \frac{2}{9}\sigma^2$$

$$BEK(T_2) = (E[T_2] - \mu)^2 + var[T_2] = (\frac{3\mu}{4} - \mu)^2 + \frac{5}{16}\sigma^2$$

Bi adierazpen horietatik txikiena zein den ezin da esan, $\mu$ eta $\sigma^2$ parametroen balioak gehiago zehaztu gabe. Beraz, ezin dugu esan zein den estimatzaile onena.

**4. ariketa**

X populazio baten batezbestekoa $\mu$ eta bariantza $\sigma^2$ dira. Populazioaren $\mu$ parametroa estimatzeko 4 tamainako lagina hartu da (x1, x2, x3, x4). Estimazioa burutzeko hurrengo bi estimatzaileak proposatu dira:

$$T_1 = \frac{x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4}{a} \quad ; \quad T_2 = \frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4}{b}$$

a) Kalkula itzazu a eta b, bi estimatzaileak alboragabeak izan daitezen. b) Lortutako a eta b parametroen balioak erabiliz, zein da efizienteagoa?

---

(a)

Alboragabeak izan daitezen hau bete behar da: $E[T] = \mu$

Lehen estimatzailea hartuz:

$$E[T_1] = E\left[\frac{x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4}{a}\right] = \frac{1}{a}\Bigg(E[x_1] + 4E[x_2] + E[x_3] + E[x_4]\Bigg) = \frac{1}{a}(\mu + 4\mu + \mu + \mu) = \frac{7\mu}{a} = \mu \rightarrow a = 7$$

$a = 7$ bete behar da beraz, lehen estimatzailea alboragabea izan dadin.

Bigarren estimatzailea hartuz:

$$E[T_2] = E\left[\frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4}{b}\right] = \frac{1}{b}\Bigg(E[x_1] + 2E[x_2] + 2E[x_3] + E[x_4]\Bigg) = \frac{1}{b}(\mu + 2\mu + 2\mu + \mu) = \frac{6\mu}{b} = \mu \rightarrow b = 6$$

$b = 6$ bete behar da beraz, bigarren estimatzailea alboragabea izan dadin.

(b)

Biak alboragabeak izanik, efizienteagoa izango da bariantza txikiena duena:

$$var[T_1] = var\left[\frac{x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4}{7}\right] = \frac{1}{49}\Bigg(var[x_1] + 16var[x_2] + var[x_3] + var[x_4]\Bigg) = \frac{1}{49}(\sigma^2 + 16\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{19\sigma^2}{49}$$

$$var[T_2] = var\left[\frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4}{6}\right] = \frac{1}{36}\Bigg(var[x_1] + 4var[x_2] + 4var[x_3] + var[x_4]\Bigg) = \frac{1}{36}(\sigma^2 + 4\sigma^2 + 4\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{10\sigma^2}{36}$$

Bigarrenaren bariantza txikiagoa da. Beraz efizienteagoa da.

**6. ariketa**

Enpresa batek saldutako urdaiazpikoen pisuak banaketa normala jarraitzen du, $sigma^2 = 4$ bariantza eta batezbesteko ezezagunarekin, baina badakigu $\mu > 5$ dela. 4 tamainako lagin aleatorio sinple bat hartu da $\mu$ estimatzeko. Bi estimatzaileetatik, zein izango da onena alboragabetasunari eta eraginkortasunari dagokienez?

$$\hat{\mu}_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4} \quad ; \quad \hat{\mu}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

---

(a)

Alboragabeak izan daitezen hau bete behar da: $E[\hat{\mu}] = \mu$

Lehen estimatzailea hartuz:

$$E[\hat{\mu}_1] = E\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}\right] = \frac{1}{4}\Bigg(E[x_1] + E[x_2] + E[x_3]\Bigg) = \frac{1}{4}(\mu + \mu + \mu) = \frac{3\mu}{4} \neq \mu \rightarrow alboratua$$

Bigarren estimatzailea hartuz:

$$E[\hat{\mu}_2] = E\left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right] = \frac{1}{2}\Bigg(E[x_1] + E[x_2]\Bigg) = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \frac{2\mu}{2} = \mu \rightarrow alboragabea$$

Alboragabetasunari buruz bigarrena da hobea noski, alboragabea delako.

(b) Eraginkortasunari buruz erabakitzeko, estimatzaileen bariantzak kalkulatu behar dira aurrena:

Lehen estimatzailea hartuz:

$$var[\hat{\mu}_1] = var\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}\right] = \frac{1}{16}\Bigg(var[x_1] + var[x_2] + var[x_3]\Bigg) = \frac{1}{16}(4 + 4 + 4) = \frac{12}{16} = 0.75$$

Bigarren estimatzailea hartuz:

$$var[\hat{\mu}_2] = var\left[\frac{x_1 + x_2}{2}\right] = \frac{1}{4}\Bigg(var[x_1] + var[x_2]\Bigg) = \frac{1}{4}(4 + 4) = 2$$

Lehen estimatzaileak bariantza txikiagoa du, baina alboratua da. Efizienteena edo eraginkorrena zein den jakiteko, BEK batezbesteko errore kuadratikoa (alborapena ber bi gehi bariantza) kalkulatu behar da:

Eman dezagun lehenengoaren alborapena: $alb[\hat{\mu}_1] = E[\hat{\mu}_1] - \mu = \dfrac{3\mu}{4} - \mu = -\dfrac{\mu}{4}$

$$BEK[\hat{\mu}_1] = \left(-\frac{\mu}{4}\right)^2 + 0.75 = \left(\frac{\mu}{16}\right) + 0.75$$

Dakigunez $\mu > 5$ dela, BEK 5/16+0.75=1.06 baino handiagoa da.

Bigarren estimatzailearen buruz, alboragabea denez, bere alborapena 0 da, eta beraz bere BEK bat dator bariantzarekin eta orduan 2 da.

Lehen estimatzailearen BEK 1.06 baino handiagoa dela ziurta dezakegu. Bigarren estimatzailearen BEK 2 da. Beraz, ezin dugu jakin zeinek izango duen BEK txikiagoa eta beraz ezin esan daiteke zein den eraginkorrena.