

DE MOIVRE-LAPLACE TEOREMA ARIKETAK

Egilea: Josemari Sarasola



GIZAPEDIA

gizapedia.hirusta.io

Ariketak: De Moivre-Laplace teorema

1. **Erraza** Denda batera sartzen diren bezeroen %20ak erosten du zerbait. Egun batean 1.000 bezero sartuko direla uste da.
 - (a) Zenbat bezerok erosiko dute zerbait batezbeste?
 - (b) Nola banatzen da zerbait erosten duten bezeroen kopurua?
 - (c) Azaldu nola kalkulatu zenukeen gutxienez 250 bezerok zerbait erosteko probabilitatea, banaketa binomiala erabiliz.
 - (d) Kalkulatu gutxienez 250 bezerok zerbait erosteko probabilitatea, hurbilketa normala erabiliz.
 - (e) Kalkulatu bezeroen %30ek zerbait erosteko probabilitatea.
 - (f) Zenbat bezero sartu beharko lirateke dendara 250 bezero baino gehiagok zerbait erosteko probabilitatea 0.9 izan dadin gutxienez?
2. **Erraza-ertaina** Isunen %40ak errekurritu egiten dira.
 - (a) 200 isun jarri badira, zenbatekoa da 90 isun baino gehiago errekurrituak izateko probabilitatea?
 - (b) Isuna errekurritzeko portzentajea handiegia dela irizten da, eta laster ordaintzeagatiko beherapena proposatu da portzentajea murrizteko. Neurri hau abian jarri eta 300 isuna notifikatu ondoren, beherapenarekin, 100 erreklamatu dira. Beherapena eraginkorra dela esango zenuke? $\alpha = 0.01$
3. **Ertaina** 900 pieza ekoitzi behar dira. Zenbat izan behar da pieza bakoitza akastuna izateko probabilitatea, pieza guztietatik 600 akasgabe baino gehiago izateko probabilitatea 0.95 izan dadin?
4. **Zaila** Irakasle batek bi azterketa prestatu ditu 160 ikaslerentzat. Lehenengoa aski erraza da: ikasleen nota $N(6.3, 1)$ banatzen dela uste da, eta gaitziztat 5ekin emango da. Bigarrena zailagoa da: nota $N(4, 1)$ banatzen da. Zenbateko puntuazioarekin eman beharko luke aprobataua irakasleak bigarren azterketarekin, lehenengo azterketan gutxienez 140 ikaslek aprobatzeko probabilitate berdina izateko?
5. **Ertaina** Atezain batek penaltien %15ak gelditzen ditu. Trebakuntza zorrotz baten ondorioz, 100 penaltietatik 30 gelditu zituen. Trebakuntza probetxuzkoa izan dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %1.

Ebazpenak: De Moivre-Laplace teorema

[1] Denda batera sartzen diren bezeroen %20ak erosten du zerbait. Egun batean 1.000 bezero sartuko direla uste da.

- (a) Zenbat bezero erosi dute zerbait batezbeste?
- (b) Nola banatzen da zerbait erosten duten bezeroen kopurua?
- (c) Azaldu nola kalkulatu zenukeen gutxienez 250 bezero zerbait erosteko probabilitatea, banaketa binomiala erabiliz.
- (d) Kalkulatu gutxienez 250 bezero zerbait erosteko probabilitatea, hurbilketa normala erabiliz.
- (e) Kalkulatu bezeroen %22ek zerbait erosteko probabilitatea.
- (f) Zenbat bezero sartu beharko lirateke dendara 250 bezero baino gehiagok zerbait erosteko probabilitatea 0.9 izan dadin gutxienez?

(a)

Argi dago batezbeste $\mu = 0.2 \times 1000 = 200$ bezero izango direla erosleak. Eraitza nahiko intuitiboa da gainera.

(b) Erosle kopuruari X deitzen badiogu:

$$X \sim B(n = 1000, p = 0.2)$$

(c)

$$P[X \geq 250] = P[X = 250] + P[X = 251] + \dots + P[X = 1000]$$

Eta adibidez, horrela kalkulatu genuke $P[X = 250]$:

$$P[X = 250] = 0.2^{250} \times 0.8^{750} \times \frac{1000!}{250!750!}$$

Eskuz kalkulatzeko oso luzea.

(d)

n parametroa aski handia denez gero, p txikia izan gabe, banaketa binomiala banaketa normalaz hurbildu daiteke zehaztasun handiz:

$$X \sim B(n = 1000, p = 0.2) \rightarrow N(\mu = 1000 \times 0.2 = 200, \sigma = \sqrt{1000 \times 0.2 \times 0.8} = 12.64)$$

Eskatutako probabilitatea beraz honela kalkula daiteke:

$$P[X \geq 250] = (\text{jarraitutasun} - \text{zuzenketa}) = P[X > 249.5] = P\left[Z > \frac{249.5 - 200}{12.64}\right] = P[Z > 3.91] = 0.00004$$

(e)

Bezero kopuruari, izan erosle izan ez erosle, n deituz, erosle kopurua honela banatzen da:

$$X \sim B(n, p = 0.2) \rightarrow N(\mu = 0.2n, \sigma = \sqrt{0.2 \times 0.8 \times n} = \sqrt{0.16 \times n} = 0.4\sqrt{n})$$

Emandako baldintza garatuz:

$$P[X \geq 250] = (\text{jarraitutasun} - \text{zuzenketa}) = P[X > 249.5] = P\left[Z > \frac{249.5 - 0.2n}{0.4\sqrt{n}}\right] = 0.9 \rightarrow \frac{249.5 - 0.2n}{0.4\sqrt{n}} = -1.28$$

Berrordenatuz eta $n = x^2$ aldagai aldaketa eginez, ekuazio kuadratikoa bat sortzen da, eta hortik erro positiboa hartuz ($x = \sqrt{n}$ erro negatiboak desbideratze negatiboa emango lukeelako, eta hori ez da posible):

$$0.2x^2 - 0.512x - 249.5 = 0 \rightarrow x = 36.62 \rightarrow n = 1341.02 \rightarrow 1342 \text{ bezero}$$

(f) Bezeroen %22ak, 1000 bezeroetatik, 220 bezero dira zehazki, eta gainera jarraitutasun-zuzenketa aplikatuz:

$$P[X = 220] = P[219.5 < X < 220.5] = P\left[\frac{219.5 - 200}{12.64} < Z < \frac{220.5 - 200}{12.64}\right] = P[1.54 < Z < 1.62] = 0.0091$$

[2.] Isunen %40ak errekurritu egiten dira.

- (a) 200 isun jarri badira, zenbatekoa da 90 isun baino gehiago errekurrituak izateko probabilitatea?
- (b) Isuna errekurritzeko portzentajea handiegia dela irizten da, eta laster ordaintzeagatiko beherapena proposatu da portzentajea murrizteko. Neurri hau abian jarri eta 300 isuna notifikatu ondoren, beherapenarekin, 100 erreklamatu dira. Beherapena eraginkorra dela esango zenuke? $\alpha = 0.01$

(a)

Errekurritzen den isun kopurua honela banatzen da banaketa normalarekin hurbilduz:

$$X \sim B(n = 200, p = 0.4) \rightarrow N(\mu = 200 \times 0.4 = 80, \sigma = \sqrt{200 \times 0.4 \times 0.6} = 6.92)$$

Eskatutako probabilitatea hau da:

$$P[X > 90] = (\text{jarraitutasun} - \text{zuzenketa}) = P[X > 90.5] = P\left[Z > \frac{90.5 - 80}{6.92}\right] = P[Z > 1.52] = 0.06425$$

(b)

300 isunetatik 100 erreklamatu dira. Beraz, %33ak. Ohikoa %40 da. beraz, badirudi erreklamazio-tasa gutxitu egin dela. Hipotesi nulu moduan aurkakoa hartzen dugu: $H_0 : p \geq 0.40$

Hipotesi nulu hori kontuan harturik, honela banatzen da X erreklamazio kopurua:

$$X \sim B(n = 300, p = 0.4) \rightarrow N(\mu = 300 \times 0.4 = 120, \sigma = \sqrt{300 \times 0.4 \times 0.6} = 8.48)$$

Hipotesi nulua baztertuko dugu 300 isunetatik isun gutxi erreklamatu direnean; beraz, probaren norabidea ezker alderakoa da. Jarraitutasun-zuzenketa ere aplikatu dugu:

$$P[X \leq 100] = P[X \leq 100.5] = P\left[Z < \frac{100.5 - 120}{8.48}\right] = P[Z < -2.3] = 0.01072 > \alpha$$

Beraz, ez dago ebidentzia nahikoa beherapenak erreklamazio-tasa gutxitu duenik erabakitzeko.

[3] 900 pieza ekoitzi behar dira. Zenbat izan behar da pieza bakoitza akastuna izateko probabilitatea, pieza guztietatik 600 akasgabe baino gehiago izateko probabilitatea 0.95 izan dadin?

X akasgabe kopurua honela banatzen da, n handia, eta p ezezaguna txikia izango ez dela suposatuz:

$$X \sim B(n = 900, p) \rightarrow N(\mu = 900p, \sigma = \sqrt{900p(1-p)} = 30\sqrt{p(1-p)})$$

Eskatutako probabilitatea gara dezagun:

$$P[X > 600] = P[X > 600.5] = P\left[Z > \frac{600.5 - 900p}{30\sqrt{p(1-p)}}\right] = 0.95 \rightarrow \frac{600.5 - 900p}{30\sqrt{p(1-p)}} = 1.64$$

Azken adierazpena karratura jasoaz, eta p erroak askatuz: $p_1 = 0.612$; $p_2 = 0.728$.

Baliozko soluzioa bigarrena da. Bigarren p balioarekin, batez besteko akasgabe kopurua $0.728 \times 900 = 655.2$ eta beraz koherentea da 600 akasgabe baino gehiago izateko probabilitatea 0.95 izatea. Lehenengoarekin berriz, batez besteko akasgabe kopurua $0.612 \times 900 = 550.8$, eta beraz ezinezkoa da 600 akasgabe baino gehiago izateko probabilitatea 0.95 izatea. Nolanahi ere, emaitza horiek probabilitate zehatzak kalkulatu berretsi daitezke.

[4] Irakasle batek bi azterketa prestatu ditu 160 ikaslerentzat. Lehenengoa aski erraza da: ikasleen nota $N(6.3, 1)$ banatzen dela uste da, eta gaitutzat 5ekin emango da. Bigarrena zailagoa da: nota $N(4, 1)$ banatzen da. Zenbateko puntuazioarekin eman beharko luke aprobata irakasleak bigarren azterketarekin, lehenengo azterketan gutxienez 140 ikaslek aprobatzeko probabilitate berdina izateko?

Lehenbizi, lehen azterketan 140 ikaslek edo gehiago gaitutzeko probabilitatea eman behar da.

Gaitutzen duen ikasle kopurua honela banatzen da: $X \sim B(n = 160, p)$, p_1 izanik gaitutzeko probabilitatea.

Eman dezagun bada gaitutzeko probabilitatea:

$$p_1 = P[X > 5] = P\left[Z > \frac{5 - 6.3}{1}\right] = 0.9032$$

Beraz, gaitutzen duen ikasle kopurua honela banatzen da:

$$X \sim B(n = 160, p_1 = 0.9032) \rightarrow N(\mu = 160 \times 0.9032 = 144.51, \sigma = \sqrt{160 \times 0.9032 \times (1 - 0.9032)} = 3.74)$$

Eta beraz, 140 ikasle edo gehiago gaitutzeko probabilitatea hau da:

$$P[X \geq 140] = P[X > 139.5] = P\left[Z > \frac{139.5 - 144.51}{3.74}\right] = P[Z > -1.34] = 0.9098$$

Bigarren azterketan gaitutzen duen ikasle kopurua honela banatzen da:

$$X \sim B(n = 160, p_2) \rightarrow N(\mu = 160p_2, \sigma = \sqrt{160p_2(1-p_2)} = 12.65\sqrt{p_2(1-p_2)})$$

140 ikaslek edo gehiago gaitutzeko probabilitatea 0.9098 izatea nahi badugu:

$$P[X \geq 140] = P[X > 139.5] = P\left[Z > \frac{139.5 - 160p_2}{12.65\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right] = 0.9098 \rightarrow \frac{139.5 - 160p_2}{12.65\sqrt{p_2(1-p_2)}} = -1.34$$

Bi soluzio suertatzen dira: $p_2 = 0.903$; $p_2 = 0.832$. Aurreko z balio zehatzak kalkulatu baditugu, bi p_2 horiekin, ikusten dugu zuzena lehena dela (0.903), besteak (0.832) 1.34 ematen duelako. Beraz, bigarren azterketan gaitutzeko probabilitatea 0.903 izan behar da. Eta beraz, horretarako nota:

$$P[X > x] = P\left[Z > \frac{x - 4}{1}\right] = 0.903 \rightarrow \frac{x - 4}{1} = -1.3 \rightarrow x = 2.7$$

Beraz, azken erantzuna 2.7 da.

[5] Atezain batek penaltien %15ak gelditzen ditu. Trebakuntza zorrotz baten ondorioz, 100 penaltietatik 30 gelditu zituen. Trebakuntza probetxuzkoa izan dela esan al daiteke? Adierazgarritasun-maila: %1.

100 penaltietatik 30, %30ak dira. Beraz, badirudi trebakuntza probetxuzkoa izan dela. Beraz, hipotesi nulu moduan aurkakoa hartzen dugu: $H_0 : p \leq 0.15$.

Hipotesi nulua baztertuko dugu, gelditutako penalti kopurua handia denean; beraz, probaren norabidea goitik da. Gelditutako penalti kopurua honela banatzen da:

$$X \sim B(100, 0.15) \rightarrow N(\mu = 100 \times 0.15 = 15; \sigma = \sqrt{100 \times 0.15 \times 0.85} = 3.57)$$

Eman dezagun bada, p-balioa:

$$P[X \geq 30] = P[X > 29.5] = P\left[Z > \frac{29.5 - 15}{3.57}\right] = P[Z > 4.06] = 0.00002$$

p-balioa adierazgarritasun-maila baino txikiagoa denez, hipotesi nulua batzertu eta trebakuntza probetxuzkoa izan dela erabaki behar da.