Gizapedia

gizapedia.hirusta.io

Estadística aplicada a la empresa

Exámenes propuestos en la Facultad de Economía y Empresa, sección Donostia, en el curso 2016-2017, por los profesores Asier Arcos y Maria Federica Di Nola

Solucionario no oficial

Autor: Josemari Sarasola

2 de junio de 2017: PRÁCTICA

Ejercicio 1: 3 puntos

Se desea realizar un estudio sobre el número de crías de una camada. Sea la variable aleatoria X: "número de crías en una camada".

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$ con probabilidades:

- $P[X = 0] = 0.1$
- $P[X = 1] = 0.4$
- $P[X = 2] = 0.25$
- $P[X = 3] = 0.25$

TAREAS PARA HACER:

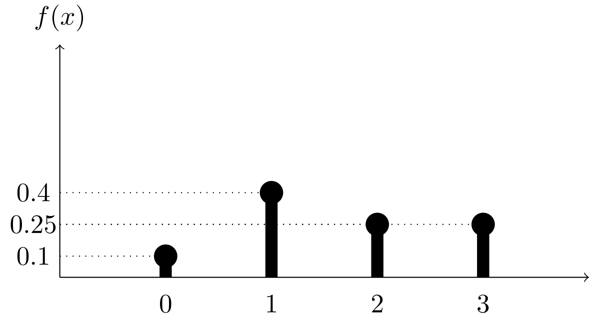
1. **Plantea la función de probabilidad $f(x)$ y la función de distribución $F(x)$.**

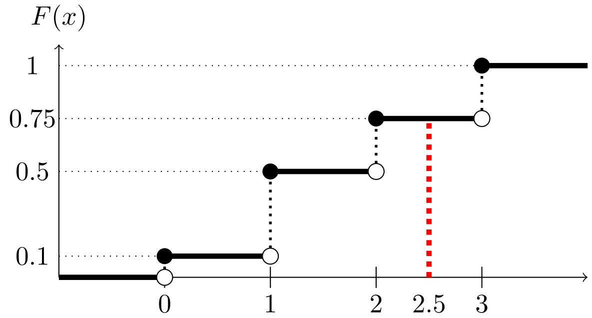
x	$f(x) = P[X = x]$	$F(x) = P[X \leq x]$
0	0.1	0.1
1	0.4	0.5
2	0.25	0.75
3	0.25	1
	1	

En modo completo $F(x)$ se define así:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 0.1; & 0 \leq x < 1 \\ 0.5; & 1 \leq x < 2 \\ 0.75; & 2 \leq x < 3 \\ 1; & x \geq 3 \end{cases}$$

2. **Representa gráficamente $f(x)$ eta $F(x)$.**





3. **Calcula $F(2.5)$.**

$$F(2.5) = 0.75$$

Se puede determinar a través del gráfico anterior, como se indica en rojo. Indica la probabilidad de que el número de crías sea menor o igual a 2.5.

4. **Calcula la probabilidad de que una camada tenga dos crías.**

El cálculo es inmediato:

$$P[X = 2] = 0.25$$

5. **Calcula la probabilidad de que el número de crías en una camada sea mayor o igual a 2.2.**

$$P[X \geq 2] = P[X = 3] = 0.25$$

6. **Calcula la esperanza matemática, varianza y desviación típica.**

x	$p(x)$	$xp(x)$	$x^2p(x)$
0	0.1	0	0
1	0.4	0.4	0.4
2	0.25	0.5	1
3	0.25	0.75	2.25
	1	1.65	3.65

- Esperanza matemtica: $\mu = E[X] = 1.65$ crías
- Varianza: $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 3.65 - 1.65^2 = 0.9275$
- Deaviación típica: $\sigma = 0.963$

7. **Ahora imagina que un cachorro recién nacido ladra en promedio 3 veces por minuto. Halla la probabilidad de que no ladre en un minuto.**

Si los ladridos ocurren aleatoriamente, el número de ladridos se distribuye $Poisson(\lambda_{1\ min} = 3)$. De esta forma:

$$P[no\ ladrar\ en\ un\ minuto] = P[X = 0] = \frac{e^{-3}3^0}{0!} = 0.049$$

8. **Halla la probabilidad de que en un minuto ladre más de 3 veces.**

$$P[X > 3] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \left(\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^3}{3!}\right) = 0.3527$$

9. **Halla la probabilidad de que en tres minutos ladre menos de 4 veces.**

$$\lambda_{3min} = 9$$

$$P[X < 4] = P[X \leq 3] = \frac{e^{-9}9^0}{0!} + \frac{e^{-9}9^1}{1!} + \frac{e^{-9}9^2}{2!} + \frac{e^{-9}9^3}{3!} = 0.021$$

Ejercicio 2: 2 puntos

Un producto industrial se obtiene ensamblando tres componentes. El peso total Y del producto es la suma de los pesos X, V y W de sus componentes. Debido a la variabilidad del proceso, se puede asumir que los pesos de los componentes sean variables aleatorias independientes y se distribuyan normalmente con medias 2, 4, y 3 gr y varianzas 0.01, 0.02 y 0.02 gr^2, respectivamente.

TAREAS PARA HACER:

1. **¿Cuál es la distribución de Y? ¿Cuánto valen sus parámetros?**

   Por la reproductividad de la distribucion normal, la variable Y se distribuye de este modo:

$$Y \sim N(\mu = 2+4+3 = 9, \sigma = \sqrt{0.01+0.02+0.02} = 0.22)$$

2. **Determina la probabilidad de que el peso total del producto satisfaga el estándar cualitativo prefijado de $\mathbf{9 \pm 0.25}$ gr.**

$$\begin{aligned} P[Y = 9 \pm 0.25] = P[8.75 < Y < 9.75] &= P\left[\frac{8.75-9}{0.22} < Z < \frac{9.25-9}{0.22}\right] \\ &= P[-1.13 < Z < 1.13] \\ &= P[Z < 1.13] - P[Z < -1.13] \\ &= P[Z < 1.13] - (1 - P[Z < 1-13]) \\ &= 0.8707 - (1 - 0.8707) \\ &= 0.7415 \end{aligned}$$

Ejercicio 3: 3 puntos

Para justificar su demanda de subida de sueldo, los trabajadores de una empresa de ventas online afirman remitir, en promedio, un pedido cada 13 minutos. El director general está dispuesto a conceder la subida de sueldo solo si el tiempo de remisión registrado en la empresa no es mayor que el declarado por los trabajadores. Para tomar su decisión, observa una muestra aleatoria de 400 pedidos registrando un timpo medio de remisión de $14min$ con varianza $100min^2$.

TAREAS PARA HACER:

1. **¿Qué se puede concluir sobre la demanda de los trabajadores a un nivel de significación del 5%?**

   Parece ser que el director piensa que los trabajadores no cumplen su condición ($\mu > 13$), de modo que debe tomarse como hipótesis nula la complementaria o contraria:

   $$H_0 : \mu \leq 13$$

   Al ser el tamaño muestral lo suficientemente grande (mayor que 30) la media muestral se distribuye de esta forma, calculada la varianza muestral corregida, al ser la varianza poblacional desconocida:

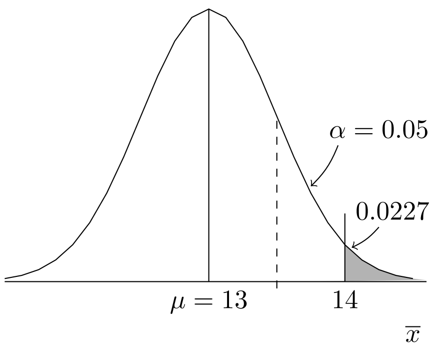
   $$\hat{s}^2 = 100 \to \hat{s} = 10$$

   $$\overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) : N\left(13, \frac{10}{\sqrt{400}}\right) : N(13, 0.5)$$

   La región de rechazo se situa a la derecha (se rechaza $\mu \leq 13$ cuando la media muestral es alta), de modo que calculamos el valor p de esta forma:

   $$P[\overline{x} > 14] = P\left[Z > \frac{14-13}{0.5}\right] = P[Z > 2] = 0.0227$$

   Al ser el valor p menor que el nivel de significación proporcionado, la hipótesis nula ($H_0 : \mu \leq 13$) se rechaza, y por tanto no se debería aceptar la propuesta de los trabajadores, al menos a ese nivel de significación.

2. **¿Cambiaría la decisión del director si el nivel de significación fuera el 1%?**

   La respuesta es afirmativa, ya que en ese caso el valor p calculado anteriormente sería mayor que el nivel de significación. Por tanto, en ese caso se debería aceptar la propuesta de los trabajasores. Todo depende por tanto del grado de creencia del director respecto a la hipótesis nula.

3. **Calcula la probabilidad del error tipo II si el verdadero valor del parámetro es 15, a un nivel de significación del 5%.**

Hay que determinar primero la región de rechazo. Para ello calculamos el valor crítico que le corresponde:

$$P[\overline{x} > \overline{x}_0] = P\left[Z > \frac{\overline{x}_0 - 13}{0.5}\right] = 0.05 \to \frac{\overline{x}_0 - 13}{0.5} = 1.64 \to \overline{x}_0 = 13.82$$

Establecemos la hipótesis alternativa:

$$H_a : \mu = 15$$

Aceptamos, pues, $H_0 : \mu = 13$ cuando $\overline{x} < 13.82$. *Si en ese caso* $H_a : \mu = 15$ es cierta, cometemos el error tipo II. Por otro lado, si $H_a : \mu = 15$ es cierta:

$$\overline{x} \sim N(15, 0.5)$$

Y por tanto, la probabilidad de que se cometa el error tipo II es:

$$P[\overline{x} < 13.82] = P\left[Z < \frac{13.82 - 15}{0.5}\right] = P[Z < -2.36] = 0.009$$